Lógica para principiantes

2000

Índice general

0.1. Prefacio

Será éste un bonito curso de Lógica, que espero os resulte atractivo y súmamente útil. Está concebido como un curso para principiantes, en el que se suministran algunas técnicas sencillas y se apoya el texto con numerosos ejemplos y ejercicios. Se han seleccionado técnicas que utilizan diagramas porque permiten una visualización rápida y está demostrado que pedagógicamente rinden mucho más.

La idea es que estas notas puedan ser usadas como guía para enseñar lógica en los niveles previos al universitario. Las definiciones son rigurosas, pero se han omitido las pruebas de los muchos e importantes metateoremas que a nivel universitario se tratarán; por ejemplo, explicamos que la técnica de los tableaux semánticos es un cálculo deductivo formal que permite probar todas y solas las fórmulas válidas (esto es, las 'verdades' de la lógica), pero no lo demostramos. La razón es pedagógica, pensamos que a este nivel tan introductorio no se precisa. Así que debeis confiar en nosotros o consultar la demostración en la página de ARACNE, de la que hablaré después. Por supuesto, hay numerosos libros de texto en donde se demuestra; por ejemplo, los de Smullyan [1994] y Fitting [1996]

Habréis observado que como autor de estas páginas aparece ARACNE; obviamente no se trata del personaje mitológico, sino de una red ALFA (América Latina Formación Académica: proyecto de la Unión Europea) de innovación y sistematización de la tarea educativa.

Podeis visitar la página del proyecto TOOLS FOR TEACHING

http://aracne.usal.es

en el apartado de RESULTADOS está el METABOOK, un DICCIONARIO on-line y SOFTWARE para la enseñanza de la lógica, así como enlaces con los centros que se preocupan por la pedagogía de la lógica.

Los libros que aparecen en la bibliografía lo son para que puedan ser consultados con posterioridad, pero no seguiremos ninguno en particular. Una lista algo más extensa de libros introductorios, algunos en español, está también en nuestra página web. En este curso sólo utilizaremos este texto, algunos programas que se incluyen en un CD-ROM y por supuesto, el 'cara a cara' virtual, que las nuevas tecnologías nos permitirán.

Este texto lo han escrito las siguientes personas.:

Capítulos 1 al 3 y 8 al 10, María Manzano
Capítulos 4 y 11, Ian Hodkinson
Capítulos 5 y 7, Antonia Huertas
Capítulo 6, María Manzano

Yo he propuesto la mayor parte de los ejemplos y ejercicios, algunos están sacados de manuales clásicos en la materia y se han usado en clases prácticas en numerosas ocasiones. Agradezco a Lydia Sanchez y Ulises Tindón su colaboración.

Finalmente, agradezco a todos los integrantes del proyecto ALFA y a los profesores que impartirán conmigo el curso *De pura lógica,* el haberme permitido participar en esta tarea fascinante que es la enseñanza de la lógica.

María Manzano (Coordinadora de ARACNE)
Universidad de Salamanca
mara@gugu.usal.es

Parte I

LÓGICA PROPOSICIONAL

Capítulo 1

Introducción General

1.1. ¿Qué es la Lógica?

El objetivo fundamental de este tema es el de introducir, de manera intuitiva, los conceptos fundamentales de la lógica, y muy particularmente, el concepto de consecuencia, ya que la lógica puede ser caracterizada como el estudio de la consecuencia; o lo que es lo mismo, como el estudio de los razonamientos válidos o correctos. Nosotros la caracterizaremos como el estudio de los conjuntos de creencias consistentes porque pienso que de esta forma es más fácil al comienzo y porque se sabe que los dos planteaminetos son equivalentes, como se verá ampliamente en este curso.

1.1.1. En sentido amplio.

La *Lógica* es lo que tienen en común ciencias tan dispares como:

MATEMÁTICAS
FILOSOFÍA
LINGÜÍSTICA
INFORMÁTICA
DERECHO
FÍSICA
SOCIOLOGÍA
⋮

Lo que comparten:
(1) No puede ser *el tema de estudio*
(2) Tampoco *la metodología*
(3) ¿Racionalidad, coherencia, consistencia?

La *Lógica* es más que eso: Todos nosotros, supuestos seres racionales, empleamos la lógica cuando razonamos, asimilamos o procesamos la información que recibimos del entorno, cualquier tipo de información. (Somos lógicos porque somos seres humanos.)

$$\textit{Hombre} = \textit{Animal+Racional}$$

$$\textit{Racionalidad} \implies \textit{Lógica}$$

1.1.2. En sentido estricto.

La *Lógica* es también una disciplina en sí misma, una de las grandes ramas del conocimiento.

$$\textit{Lógica} = \text{estudio de la } \textit{consecuencia}$$

(razonamientos válidos o correctos)

$$\textit{Lógica} = \text{estudio de la } \textit{consistencia}$$

(conjuntos de creencias coherentes, *consistentes, satisfacibles*)

Para definir una *Lógica* se define un lenguaje artificial; con un alfabeto y unas reglas *gramaticales* de formación de fórmulas y se atribuye significado a las expresiones del lenguaje mediante interpretaciones *semánticas.* Dichas interpretaciones nos permiten decir, en algunos casos, que de ciertos conjuntos de fórmulas (que se toman como hipótesis) se siguen ciertas fórmulas. Es decir, que dichas fórmulas son consecuencia semántica de las hipótesis consideradas.

$$\textit{Lógica} = \textit{Gramática+Semántica}$$

En algunas ocasiones se puede definir un *cálculo deductivo* que permite mecanizar el proceso de extraer conclusiones a partir de hipótesis. Por supuesto, se desea que el cálculo sea una réplica mecanizable de dicho proceso; es decir, equivalente (los mismos resultados).

$$\textit{Semántica} \iff \textit{Cálculo}$$

La *Lógica* es una *herramienta* que nos sirve para computar razonamientos, especialmente cuando el rigor y la precisión son imprescindibles. Esto sucede en matemáticas, filosofía, informática, etc. Pero un lenguaje lógico es también un *objeto de estudio*; podemos ver qué propiedades tiene el lenguaje; si el concepto de consecuencia se puede retener mediante las reglas de un cálculo, si hay cálculos más efectivos, incluso si existen algoritmos capaces de suplirlos. Estudiaremos las denominadas propiedades de: *corrección, completud* y *decidibilidad.*

1.1.3. Históricamente.

Pasado.

El estudio de la lógica se remonta a los filósofos griegos; en el Organon de Aritóteles se estudian los principios del silogismo. A mediados del siglo XIX Boole (1815-1864) creó el primer cálculo lógico, para la lógica proposicional. La lógica en sentido moderno nace a finales del siglo XIX y principios del XX.

Dentro de la lógica se distinguen tres grandes ramas:

TEORÍA DE LA PRUEBA

Frege (1848-1925), Peano (1858-1932), Russell (1872-1970), Hilbert (1862-1943), Herbrand (1908-1931) y Gentzen (1909-1945) desarrollaron la *Teoría de la Prueba* de la lógica de primer orden. Todos ellos pretendían sistematizar el razonamiento matemático y atacar con la poderosa artillería lógica la fundamentación de la matemática.

Frege es el padre de la lógica moderna, al que debemos gran parte de las distinciones y conceptos en ella usados. El primer cálculo para la lógica de primer orden fue el *Begriffschrift* de Frege. Russell y Whitehead con su *Principia Mathematica* intentaron reducir los conceptos matemáticos (de la aritmética y el álgebra) a conceptos lógicos. Peano axiomatizó la aritmética.

La teoría de la prueba en un sentido mucho más delimitado nació con el denominado *programa de Hilbert.* La idea de Hilbert era la de explotar al máximo la naturaleza finita de las pruebas para proporcionar una fundamentación de la matemática. Podría resumirse su concepción diciendo que preconizaban una axiomatización de las teorías matemáticas de la que pudiera probarse su:

1. *Consistencia.* Es decir, que nunca se podrá demostrar como teoremas de la teoría una sentencia y su negación.

2. *Completud.* Es decir, que cada sentencia (del lenguaje en el que se axiomatizó la teoría) sea ella misma o su negación un teorema de la teoría axiomática.

3. *Decidibilidad.* Es decir, que exista un procedimiento efectivo mediante el cual, en un número finito de pasos, se determine si una sentencia del lenguaje es o nó un teorema de la teoría.

Los sistemas de Cálculo de Gentzen orientaron la teoría de la prueba a sus actuales derroteros, ligada inexorablemente a la perspectiva informática. El teorema de Herbrand de 1930 y, posteriormente, el de Robinson se consideran los pilares de la *demostración automática de teoremas.*

TEORÍA DE MODELOS.

En el nacimiento de la lógica de primer orden participan decisivamente otro grupo de investigadores cuya orientación apuntaba a la, posteriormente bautizada, *Teoría de Modelos.* Löwenheim (1878-1957), Skolem (1887-1963), Gödel

(1906-1978) y Tarski (1901-1983) son los pioneros de otra línea de investigación consistente en el estudio de las estructuras matemáticas considerando las leyes a las que obedecen. Löwenheim y Skolem demostraron teoremas generales acerca de la infinita variabilidad de la cardinalidad de los modelos de las teorías de primer orden, de la incapacidad de esa lógica para caracterizar estructuras infinitas, de su negada habilidad para distinguir entre cardinalidades infinitas. Gödel demostró la completud del cálculo de la lógica de primer orden. A Tarski le debemos los conceptos fundamentales de la semántica y de la Teoría de Modelos. A él le cabe además el mérito de haber concebido y dirigido un programa de investigación sistemática en esta disciplina.

En 1931 Gödel demostró que si la aritmética elemental es consistente, no puede ser completa, y que en general el programa de Hilbert es irrelizable. Para demostrar este teorema, conocido como *teorema de incompletud,* Gödel introdujo el concepto de recursividad.

Comentario 1 *Estamos usando el término completud de dos formas: (1) completud de una lógica y (2) completud de una teoría. En el primer caso es una propiedad del cálculo; a saber, que es capaz de generar como teoremas a todas las fórmulas válidas. En el segundo caso es una propiedad de una teoría; a saber, la de ser tan potente que toda sentencia del lenguaje (o su negación) se derive de la teoría.*

TEORÍA DE LA RECURSIÓN.

¿Cuándo decimos que una función es recursiva?, ¿Qué significa ser recursiva?

Hay varias definiciones precisas, entre sí equivalentes, de este concepto. La noción intuitiva correspondiente a ser recursiva es ser *efectivamente computable.*

¿Cuándo decimos que una función es efectivamente computable?

Sencillamente, cuando hay un procedimiento efectivo -esto es, un algoritmo- que la computa. Un procedimiento efectivo debe cumplir una serie de requisitos. No imponemos restricciones de naturaleza práctica a los procedimientos efectivos; por ejemplo en una función sobre los naturales, los argumentos han de ser números naturales, pero pueden serlo de cualquier tamaño, el procedimiento ha de ser finito, pero no se pone una limitación, tampoco se prefija la cantidad de papel (o espacio de memoria) que haya de precisarse para realizar el cálculo. La computabilidad efectiva no es lo mismo que computabilidad práctica, lo sería en una situación ideal en la que no importase ni el tiempo ni el espacio de memoria precisado.

Los orígenes de la teoría clásica pueden hallarse en Dedekind, cuando en 1988 introduce el estudio de las funciones definibles sobre el conjunto de los números naturales usando ecuaciones y, recurrentemente, la inducción sobre los números naturales que él había formulado y precisado. De ahí le viene justamente el nombre.

Por lo que respecta a su estadio presente, cuyo radio de acción cubre la totalidad de las funciones efectivamente computables, los orígenes hay que buscarlos en el grupo de Princeton; empezó con Church (1903-1995), pero si hay que atribuirle un padre, éste es Kleene. El fue quien la impulsó, definió y acotó: suyos son los *teoremas de la forma normal* y el de *recursión.*

En cuanto a la definión misma, circulaban varias versiones de este conceptp, aunque había cierta resistencia a aceptarlas como definiciones. Varios de estos conceptos aparecieron en los años 30 para caracterizar nociones que en principio parecían diferentes: la primera era la caracterización de Gödel de las funciones definidas mediante recursión, la segunda era la de función definible mediante el operador λ, que Church y Kleene introdujeron, y la tercera era la de función computable mediante una máquina abstracta, las máquinas de Turing. Pronto se demostró que las tres nociones definían las mismas funciones.

Presente.

En la primera mitad de este siglo la lógica se aplicó mayormente a la fundamentación de la matemática. En la segunda mitad ha jugado un papel decisivo en la creación y desarrollo de la informática y los lenguajes de programación, hasta el extremo de poderse caracterizar a la informática así:

Informática = Lógica+Ingeniería electrónica

La *Lógica* proporciona los fundamentos para las diversas -cada vez más abundantes- *aplicaciones de la lógica en la informática: verificación de hardware y software, inteligencia artificial, programación lógica, deducción automática,...*

Futuro.

La *Lógica* es la materia interdisciplinar por excelencia y actúa como núcleo de una ciencia que emerge: la *Ciencia de la transmisión de la información.*

Triángulo de las Bermudas = *Lógica, Lenguaje e Informática*

Por consiguiente, concentrarnos en estudiar los principios que gobiernan la lógica tiene un carácter ejemplificador pues en ella se funden disciplinas en donde son determinantes los aspectos simbólicos del proceso de información; esto es, en todas en las que es conveniente usar lenguajes artificiales. Empezaremos estudiando la denominada *lógica clásica*, tanto proposicional como de primer orden.

Comentario 2 *La **lógica clásica** se caracteriza por su rigor y precisión (pero carece de matices; la verdad es absoluta, el tiempo está ausente, no hay ambigüedad). La lógica clásica caracteriza el razonamiento de las matemáticas y cuando se aplica a ejemplos no matemáticos, se matematizan primero.*

Comentario 3 *Hay otras lógicas: Temporal, modal, dinámica, borrosa, no-monotónica,...*

- *Lógica* = estudio de la *consecuencia* (razonamientos válidos o correctos)
- *Lógica* = estudio de los conjuntos de creencias *consistentes*
- *Lógica = Gramática + Semántica (+ Cálculo)*

1.2. Consistencia.

La *consistencia lógica* o coherencia interna de un conjunto de creencias significa para nosotros *compatibilidad de creencias*.

Hay que distinguir la consistencia lógica, que es una cualidad formal, abstracta, de ciertas virtudes, por otra parte muy estimables, como la lealtad, la justicia o la sinceridad. Por su parte, la inconsistencia no hay que confundirla con la estupidez o la irracionalidad, aunque estén próximas. Hay que distinguirla también, y esto es más difícil, del desacuerdo con la realidad.

Consistencia $\neq$ *lealtad*

Consistencia $\neq$ *justicia*

Consistencia $\neq$ *sinceridad*

Inconsistencia $\neq$ *estupidez*

Inconsistencia $\neq$ *irracionalidad*

Inconsistencia $\neq$ *desacuerdo realidad*

Comentario 4 *Un conjunto de creencias puede muy bien estar en desacuerdo con la realidad y no ser inconsistente, pues no existe incompatibilidad de creencias. (Los conjuntos consistentes de creencias se caracterizan porque es siempre posible imaginar una situación en la que todas ellas sean verdaderas, pero puede no ser la del mundo real.)*

Comentario 5 *Nadie sostiene, a sabiendas, conjuntos de creencias inconsistentes. (Leyes lógicas ¿son naturales?, ¿ convencionales?, ¿se adquieren?,...)*

La *consistencia* también se puede predicar de una creencia aislada; en tal caso ser consistente es poder ser verdadero en una situación posible, no necesariamente en todas, ni tan siquiera se exige que lo sea así en la realidad. La *Inconsistencia o Contradicción* es mucho más fuerte: no puede ser verdadero en ninguna situación.

1.2.1. Ejemplos:

EJEMPLO 1.- ¡Políticos!

Suponed que un político manifiesta:

- *Es un error censurar, por violentas, la retransmisión de las corridas de toros porque lo que vemos en la televisión no afecta en absoluto el comportamiento; ni siquiera el de los jóvenes.*
- *Debería haber más programas y documentales que mostraran nuestras costumbres nacionales (bailes típicos, corridas de toros, concursos de cortar troncos, etc) para así fomentar estas costumbres entre los jóvenes.*

Suponiendo que manifiesta lo que cree ¿Son consistentes sus creencias?

EJEMPLO 2.- El barbero de Las Batuecas.

Hace pocos días me contaron el caso de un hombre llamado Roque, barbero en Las Batuecas. Sólo me habían dicho dos frases cuando exclamé: ¡Imposible!

- *Roque vive en Las Batuecas.*
- *Roque afeita a los habitantes de Las Batuecas que no se afeitan a sí mismos y sólo a ellos.*

¿Creeis que me precipité al no creerme lo que me contaban?

EJEMPLO 3.- OKUPAS (SQUATTERS)

El alcalde de una gran ciudad manifiesta a la prensa:

- *No es que haya falta de viviendas sociales en nuestra ciudad, ni en Madrid, ni en Barcelona.*
- *Lo que pasa es que los OKUPAS, que son gente que no tiene en donde vivir, han hecho circular ese infundio.*

Si fuérais periodistas del partido del alcalde, ¿ publicarías sus palabras sin más?

1.3. Enunciados que expresan creencias.

Puesto que las creencias son inmateriales, intangibles, es conveniente ocuparse de su expresión mediante el lenguaje, y mejor aún, como las palabras se las lleva el viento, mediante el lenguaje escrito.

Sin embargo, es de todos sabido que la relación entre pensamiento y lenguaje plantea muchos problemas:

1. En primer lugar, hay oraciones, o enunciados, tales como las preguntas, las órdenes, las exclamaciones o las dudas que no expresan creencias. Por consiguiente, nos limitaremos al *uso aseverativo* (declarativo o enunciativo) del lenguaje.

2. Por otra parte, una oración puede tener más de un significado; la lengua natural está plagada de *ambigüedades léxicas, estructurales, de referencias cruzadas*, etc. No deseamos (ni podríamos) cambiar el lenguaje natural, pues gracias a estas propiedades el lenguaje natural es flexible, con él se puede desde contar chistes hasta hacer filosofía de la cosmología. Sin embargo, en lógica necesitamos un lenguaje riguroso, preciso, y habrá que solventar estos problemas creando un lenguaje artificial.

3. Otro problema es que los enunciados precisan ser contextualizados y así el mismo enunciado puede expresar distintas creencias al recibir *distintas contextualizaciones.*

4. En ocasiones no está claro qué pensamiento o creencia expresa una determinada oración; hay *expresiones engañosas*, incluso deliberadamente engañosas.

5. Por otra parte, cuando se transcribe el lenguaje oral al escrito *se pierden matices, entonaciones, gestos, etc*, que son fundamentales para el significado.

6. Finalmente, algunos se plantean si no ha sido determinante la gramática y la estructura de las *lenguas europeas* para el desarrollo de la lógica.

Comentario 6 *Introduciremos un lenguaje formal para eludir los problemas de ambigüedad e imprecisiones diversas que caracterizan a la lengua natural.*

1.3.1. Ejemplos:

CHISTES Con frecuencia los chistes ocurren porque la frase contiene ambigüedades: léxicas, estructurales, de referencias cruzadas. Determinad qué clase de ambigüedad ocurre en los siguientes chistes:

1. Si nos encuentran, estamos perdidos. (Groucho)

2. *(En una panadería)* Por favor, una barra de pan, y si tiene huevos, una docena. (*Sale con 12 barras de pan*)

3. (*Un hombre por la calle con un pingüino, encuentra a un amigo que le recomienda*). Llévalo al zoológico. (*Unos días después se lo vuelve a encontrar con el pingüino y le pregunta si no lo había llevado al zoológico...)* Se lo pasó estupendamente, esta tarde lo llevo al circo.

1.4. Tipos de enunciados.

Los enunciados que expresan creencias pueden ser *consistentes*, cuando la creencia expresada lo es; es decir, cuando es verdadera en alguna situación. (En el lenguaje formal que se introducirá después la palabra técnica empleada no es consistente sino *satisfacible.*)

Por otra parte, un enunciado que no es verdadero en ninguna situación es *contradictorio.* Los enunciados que son verdaderos en cualquier situación son *tautologías* y los que son verdaderos en algunas situaciones y falsos en otras son *contingentes.*

Los enunciados capaces de describir una situación, y de distinguirla de otras, son contingentes. De esta clase son los enunciados que describen nuestra experiencia, que conforman la mayoría de las ciencias. Las tautologías, al ser verdaderas en toda situación, no pueden describir a ninguna en particular. ¿Describen algo? La respuesta es que sí, que *Describen a la propia lógica.* Veremos que esta idea puede ser convenientemente explotada, ya que captar el funcionamiento y naturaleza de las tautologías es captar la esencia de la lógica.

Comentario 7 *Esta tipología se reproduce en el lenguaje formal y tendremos fórmulas **satisfacibles, contingentes, contradicciones** y* **tautologías**.

1.4.1. Ejercicios:

Enunciados tautológicos, contradictorios y contingentes

Clasificad los siguientes enunciados según sean tautologías, contradicciones o contingentes.

1. El agua hierve a la temperatura de cien grados centígrados.
2. Hoy llueve o no llueve.
3. Todo cuerpo sometido a la influencia de una fuerza constante adquiere un movimiento uniformemente acelerado.
4. Me compro un coche y me voy de vacaciones equivale a decir que no es el caso que si me compro el coche no me voy de vacaciones.

1.5. Lenguaje formal.

Para obtener el rigor y precisión deseados, se introduce un *lenguaje formal (lógico).* Se tratará de un lenguaje artificial, con una reglas gramaticales explícitas que nos dicen qué sucesiones de signos del alfabeto son fórmulas y unas reglas semánticas también explícitas, que determinan cuando una fórmula es verdadera bajo una determinada interpretación (en un modelo matemático). Dependiendo del nivel de abstracción que vayamos a necesitar, de la realidad a tratar y de la naturaleza de dicha realidad en estudio, hay diversos lenguajes posibles. En este curso se estudian los lenguajes de la lógica proposicional (PL) y de la de primer orden (FOL). El primero se introduce con detalle en el capítulo siguiente, el segundo forma la segunda parte de este curso.

Comentario 8 *La lógica modal, la temporal, la dinámica, la no-monotónica y la teoría de tipos son otras de las muchas lógicas que interesan a los informáticos, a los filósofos y a los lingüistas, pero que no se tratan aquí.*

1.6. Consecuencia lógica.

Dijimos que tanto se podía caracterizar a la lógica como el estudio de los conjuntos consistentes de creencias, como el estudio de los razonamientos válidos o correctos. La idea intuitiva, que tendremos que precisar, es que un razonamiento es correcto cuando no se puede imaginar ninguna situación en la que las hipótesis del razonamiento sean verdaderas y la conclusión sea falsa; esto es, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión es inconsistente.

En la vida cotidiana nuestros razonamientos versan sobre hechos: partimos de unas premisas o hipótesis, que pueden ser verdaderas o falsas, y llegamos a una conclusión, que también puede ser verdadera o falsa. Esto enmascara los razonamientos válidos con hipótesis falsas. Para situar el problema resulta útil la siguiente tabla de doble entrada:

Razonamientos correctos

		Conclusión	
		Verdadera	Falsa
Hipótesis	Verdadera	1	$\boxed{2}$
	Falsa	3	4

Razonamientos incorrectos

		Conclusión	
		Verdadera	Falsa
Hipótesis	Verdadera	5	6
	Falsa	7	8

En lógica nos interesamos por los razonamientos del tipo 1, 3 y 4. Razonamientos de tipo 2 no hay, porque justamente lo que caracteriza a un razonamiento válido es la imposibilidad de que su conclusión sea falsa cuando sus hipótesis son verdaderas. No nos interesa tanto el que la conclusión sea verdad como que el paso entre premisa y conclusión esté justificado.

Para explicar la naturaleza de la lógica, tradicionalmente se distingue entre *forma* y *contenido* de un razonamiento; el contenido de un razonamiento puede ser de índole muy variada: puede versar sobre física, psicología, matemáticas, informática, o nuestra vida cotidiana. En lógica nos interesamos por la forma de los razonamientos, nunca por su contenido. Por supuesto, para adquirir nuevas creencias precisamos aceptar las conclusiones de los razonamientos cuyas hipótesis aceptamos como creencias; sin embargo, el contrastar dichas hipótesis cae fuera del alcance de la lógica.

1.6.1. Ejercicios:

EJERCICIO 1.- Consecuencia.

Decidid si el razonamiento consignado es o no correcto.

Treinta días tiene Noviembre con Abril, Junio y Septiembre. Veintiocho tiene uno y los demás treinta y uno.
Por lo tanto,
Abril tiene treinta días si y sólo si no los tiene Mayo, y Mayo los tiene si también los tiene Noviembre.

EJERCICIO 2.- Clasificad los siguientes argumentos según el esquema presentado; es decir, según sean correctos o no, y según el valor de verdad de las premisas y la conclusión. (Aparecen clasificados, estaban mezclados y sin clasificar antes de la clase.)

1. Tipo 1 (premisas VERDADERAS, conclusión VERDADERA; razonamiento CORRECTO)
    a) Arquímides y la corona.3.6.2
    b) Todos los números primos son impares. Siete es primo
    Siete es impar
2. Tipo 2. (premisas verdaderas, conclusión falsa; razonamiento válido)
   No existe ninguno.
3. Tipo 3 (premisas FALSAS, conclusión VERDADERA; razonamiento CORRECTO)
    a) Los filósofos no llevan bigote. José María Aznar lleva bigote.
    Luego,
    José María Aznar no es un filósofo.
        1) Si Almodóvar dirigió *El Abuelo* entonces también dirigió *Todo sobre mi madre.* Almodóvar no dirigió *Todo sobre mi madre*
        Conclusión: Almodóvar no dirigió *El Abuelo.*
4. Tipo 4 (premisas FALSAS, conclusión FALSA; razonamiento CORRECTO)
    a) Si hoy es Jueves, mañana es Viernes. Hoy es Jueves
    Conclusión: Mañana es Viernes
    Fecha: 24-3-2000 (Viernes)
5. Tipo 5 (premisas VERDADERAS, conclusión VERDADERA; razonamiento INCORRECTO).
    a) Algunos mamíferos tienen cuatro patas. El delfín es un mamífero.
    Entonces,
    El delfín tiene cuatro patas.

   b) Si Picasso nació en Málaga, entonces no es cierto que naciera en Francia. Picasso no nació en Francia.
   Conclusión: Picasso nació en Málaga.

6. Tipo 7 (premisas FALSAS, conclusión VERDADERA; razonamiento INCORRECTO).
   a) Los científicos odian las matemáticas. Einstein odiaba las matemáticas.
   Luego,
   Einstein era un científico
   b) Si hoy es Sábado o Domingo, entonces es fin de semana. Hoy no es Domingo
   Conclusión: hoy no es fin de semana.
   Fecha: 25-3-2000 (Sábado)

7. Tipo 8 (premisas FALSAS, conclusión FALSA; razonamiento INCORRECTO).
   a) Si Cervantes escribió la Colmena, Camilo José Cela escribió el Quijote.
   Camilo José Cela no escribió la Colmena.
   Luego,
   Camilo José Cela escribió el Quijote.
   b) Sólo los viejos y los niños comen chocolate. Manolito gafotas no come chocolate
   Conclusión: Manolito gafotas no es un niño.

1.7. Glosario.

1. **Consistencia**: Decimos que un conjunto de enunciados es consistente cuando existe al menos una situación que los hace simultáneamente verdaderos. (ingl.: Consistency).

2. **Inconsistencia**: Decimos que un conjunto de enunciados es inconsistente cuando no existe ninguna situación que los haga simultáneamente verdaderos. (ingl.: Inconsistency)

3. **Tautología**: Decimos que un enunciado es una tautología si, y sólo si, es verdadero en todas las situaciones posibles. (ingl.: Tautology)

4. **Contradicción**: Decimos que un enunciado es una contradicción si, y sólo si, no existe ninguna situación en la que el enunciado sea verdadero. (ingl.: Contradiction)

5. **Contingente**: Decimos que un enunciado es contingente cuando no es una tautología ni una contradicción, o lo que es lo mismo, cuando es verdadero en algunas situaciones y falso en otras. (ingl.: Contingente sentence).

6. **Consecuencia**: Decimos que un enunciado es consecuencia de un conjunto de enunciados que sirven de hipótesis si, y sólo si, no existe ninguna situación en la que cada una de las hipótesis sea verdadera y la conclusión sea falsa; es decir, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión sea inconsistente. (ingl.: Consequence).

1.8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Consistencia e inconsistencia.

Se puede encontrar una estupenda introducción muy intuitiva en HODGES W. (1977), Logic.Penguin Books, Middlexes. En el primer capítulo de este libro, titulado Consistency -páginas 13 a la 16-, se realiza una presentación del concepto de consistencia aplicado a un conjunto de pensamientos, distanciándolo de otros conceptos -como el de lealtad, justicia o sinceridad- que son identificados con éste en nuestro lenguaje natural. Puesto que los pensamientos se expresan en un lenguaje, los dos siguientes capítulos (Expressing Beliefs in Sentences y When is a sentence true? -páginas de la 17 a la 41-) están dedicados a la introducción de la consistencia. Dicha propiedad puede predicarse de enunciados declarativos (que expresan pensamientos), y las condiciones de verdad de los mismos. El cuarto capítulo (Testing for Consistency and Validity -páginas 42 a la 60-) nos presenta la relación existente entre la consistencia y la validez.

En BERGMANN M., MOOR J. & NELSON J. (1980), The logic Book. Random House, New York. podemos encontrar una sintética definición de la noción de consistencia aplicada a la lógica proposicional (también llamada sentencial) y a la de predicados, poniéndola en contacto con la noción de verdad, consecuencia y equivalencia, y acompañando todo esto de una colección de interesantes ejercicios (páginas 79 a 86, y 320 a 326).

También podemos encontrar tratamientos del mismo tema en: DEAÑO A. (1974) Introducción a la Lógica Formal. Alianza editorial, Madrid., GENSLER H. (1989) logic: analyzing and appraising arguments. Prentice hall, New Jersey., y SUPPES P.(1966) Introducción a la lógica formal. Compañía editorial continental, México D.F.

Tautología, contingente y contradicción

Todos los libros anteriormente citados hacen referencia a estos temas: HODGES (1977) en las páginas 109 a 124, BERGMANN ET ALI (1980) en las páginas 61 a 74 para la lógica proposicional y 291 a 320 para la lógica de predicados, en GENSLER H. (1989) en las páginas 65 a 94, SUPPES P (1966) en las páginas 34 a 39, y DEAÑO A. (1974) en las páginas 101 a 106.

Consecuencia

Todos los libros anteriormente citados hacen referencia a este tema: HODGES (1977) en las páginas 132 a 142, BERGMANN ET ALI (1980) en las páginas 80 a 91 para la lógica proposicional y 326 a 331 para la lógica de predicados, en GENSLER H. (1989) en las páginas 65 a 94, SUPPES P. (1966) en las páginas 39 a 44, y DEAÑO A. (1974) en las páginas 113 a 116.

Razonamientos

Todos los libros anteriormente citados hacen referencia a este tema: HODGES (1977) en las páginas 53 a 61, BERGMANN ET ALI (1980) en las páginas 5 a 18, en GENSLER H. (1989) en las páginas 326 a 360, SUPPES P.(1966) en las páginas 64 a 72. Pero especialmente tenemos que hacer referencia a la clara exposición que se realiza en DEAÑO A. (1974) en las páginas 35 a 46, donde se presenta una exhaustiva clasificación de los razonamientos teniendo en cuenta los valores de verdad de las premisas y la conclusión y la validez del mismo.

Capítulo 2

El lenguaje de la lógica proposicional.

El objetivo fundamental de este tema es doble: la adquisición de un lenguaje formal (poniendo especial énfasis en la formalización) y la introducción y justificación del método de la inducción semiótica.

En la introducción se esclarecerán los conceptos siguientes:

1. Lenguaje natural y Lenguaje formal.
2. Lenguaje y Metalenguaje.
3. Uso y Mención.
4. Funciones veritativas.

2.1. Gramática y formalización.

Vamos a construir un lenguaje al que podamos traducir las oraciones del castellano. A diferencia de las lenguas naturales (como el castellano, el inglés, el catalán o el chino) será éste un lenguaje formal que contará con unas reglas de formación precisas. El uso más frecuente que vamos a hacer del lenguaje formal es como vehículo de razonamiento. Sólo nos interesará traducir a nuestro lenguaje formal las expresiones lingüísticas que describan un estado o expresen un pensamiento completo; es decir, nos limitaremos al uso declarativo del lenguaje natural. En este sentido, nuestro lenguaje formal es muy pobre; no se puede traducir a él las preguntas, las exclamaciones, las dudas ni los chistes (bueno, tal vez mi amigo John Paulos[1] sea capaz de hacerlo). Como contrapartida a su falta de riqueza, nuestro lenguaje formal será muy preciso, carente por completo de ambigüedad o de doblez.

---

[1] ¿Habeis leído sus libros: *Mathematics and Humor, I Think Therefore I Laugh, Innumeracy* y *A Mathematician reads the Newspaper*?

Otra de las limitaciones de nuestro lenguaje formal es que será bivalente; el motivo es que nosotros aceptamos que en cada situación cada sentencia que consideremos será verdadera o falsa, nunca las dos cosas a la vez. Podemos precisar que para nosotros *falso* significa *no verdadero* y tomar *verdadero* en el sentido en el que se usa normalmente. Por otra parte, podemos considerar que las situaciones que nos incumben son tales que las sentencias relevantes son o verdaderas o falsas, pero no las dos cosas. Comprendemos que hay muchas formas distintas de no ser verdadero, pero en la lógica clásica no las distinguimos.

¿Qué hacemos con frases como, “El vino ayuda a hacer la digestión”? Esta sentencia tiene que ser considerada verdadera o falsa y no cabe considerarla parcialmente verdadera o parcialmente falsa. Si uno en realidad lo que quisiera es decir que el vino, tomado moderadamente, ayuda a alguna gente a hacer la digestión, debe usar la sentencia “El vino, tomado moderadamente, ayuda a alguna gente a hacer la digestión”.

Con todo esto no quiero decir que la lógica tenga que ser bivalente (la lógica polivalente tiene aplicaciones, especialmente la trivalente, pues a menudo resulta útil contar con el valor *indefinido*), ni que no se pueda en ella expresar proposiciones modales (necesariamente, posiblemente) o temporales (siempre, alguna vez), ni que no se deba dar juego a la ambigüedad semántica (conjuntos difusos). En esta primera parte del curso expongo el punto de vista clásico, que es el que adoptaremos, obviamente, en toda la lógica clásica.

Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el castellano, del mismo modo que utilizamos el castellano para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama *lenguaje objeto* (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, *metalenguaje* (castellano, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el castellano, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.

Finalmente, distinguimos entre *uso* y *mención* de una palabra o una expresión. Usamos normalmente las palabras para referirnos a objetos que no son lingüísticos; es decir, las usamos como un *signo,* para aludir a algo distinto de ellas mismas. Hay otras ocasiones en las que usamos el lenguaje para hablar acerca del propio lenguaje. *Usamos* entonces el metalenguaje para *mencionar* las expresiones de un lenguaje.

El lenguaje formal que vamos a introducir es el proposicional, también llamado *de conectores*, pues el análisis que se llevará a cabo con él es precisamente de un nivel muy abstracto, en donde sólo intervienen y se estudian las combinaciones de enunciados simples para formar enunciados complejos. El valor de verdad de un enunciado complejo dependerá exclusivamente de los valores de verdad de los enunciados simples que lo componen y de la interpretación de sus conectores, que está fijada de antemano. Los conectores se interpretarán como *funciones veritativas*; es decir, como funciones que a valores de verdad les asignan valores de verdad (o a pares de valores de verdad les asignan valores de verdad).

Finalmente, por tratarse de lógica proposicional los átomos son los enunciados simples, que, consecuentemente, no se analizan. Tampoco usaremos cuantificadores. Es decir, el enunciado

Todos los árboles son pinos

es en lógica proposicional un enunciado atómico.

2.1.1. Ejemplos y Ejercicios.

En las frases siguientes hay tres tres niveles de lenguaje; usamos comillas y dobles comillas para indicarlo:

EJEMPLO 1.- "'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', dijo Averroes", escribe Jorge Luis Borges.

EJEMPLO 2.- Dice Hipólito en su obra *Refutatio omnium haereseum*: "la frase 'el bien y el mal son uno' fue escrita por Heráclito".

EJEMPLO 3.- Es verdad que Valle Inclán ha escrito: "A bordo de la *Dalila*, lo recuerdo con orgullo, asesiné a Sir Roberto Yones".

EJERCICIO 1.- poned comillas para distinguir uso y mención.

Salamanca está bañada por el Tormes
Salamanca tiene nueve letras.

EJERCICIO 2.- poned comillas para distinguir uso y mención.

Madrid empieza por m,
termina con t
pero generalmente se escribe con g

2.1.2. Gramática de L_0.

¿Cómo se construye un lenguaje formal?

Un lenguaje formal consta de un alfabeto básico y de unas reglas precisas de formación de fórmulas.

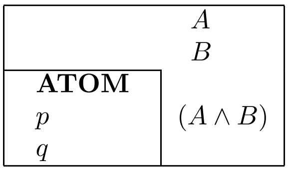
Alfabeto.

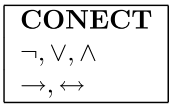
El alfabeto del lenguaje L_0 de la lógica proposicional contiene dos tipos de signos: los conectores y las letras proposicionales. Nosotros usamos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ como conectores y las letras p, q, r, s, ..., p_1, p_2, ... como letras proposicionales. También, como signos impropios utilizaremos paréntesis.

Fórmulas.

Las fórmulas de L_0 se construyen siguiendo unas sencillas reglas de formación. Dichas reglas extraen del conjunto de filas de signos del alfabeto a aquellas a las que llamamos fórmulas. El conjunto de las fórmulas de L_0 (al que llamamos **FORM**(L_0), o simplemente **FORM**, cuando esté claro por el contexto) es *el menor conjunto* que se puede generar con su ayuda a partir de las letras proposicionales.

- **F1**.- Las letras proposicionales son fórmulas.
- **F2**.- Si A y B son fórmulas, también lo son: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$





Comentario 9 *Adviértase que tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas, como el menor conjunto que cumple las reglas **F1** y **F2,** si un conjunto* $\mathcal{Q}$ *cumple las mencionadas reglas, entonces **FORM***$(L_0) \subseteq \mathcal{Q}$ *lo que significa que todas las fórmulas están en dicho conjunto.*

Comentario 10 *A las fórmulas que son simplemente letras proposicionales, las llamamos **fórmulas atómicas.** Las fórmulas obtenidas mediante la regla **F2** reciben las denominaciones siguientes:*

Forma lógica	**Denominación**
$\neg A$	negación
$(A \wedge B)$	conjunción
$(A \vee B)$	disyunción
$(A \to B)$	condicional
$(A \leftrightarrow B)$	bicondicional

Comentario 11 ***Comentario importante:****Entre las reglas de formación de fórmulas tenemos la siguiente: Si* A *y* B *son fórmulas, también lo es* $(A \wedge B)$*. ¿Qué pintan* A *y* B *aquí? Entre los signos de nuestro lenguaje no aparecían las primeras letras mayúsculas del alfabeto latino, se nos podría decir.*

Comentario 12 *Demostrar que una sucesión de signos del alfabeto* L_0 *es una fórmula consiste en mostrar que se construyó conforme a las reglas del cálculo de fórmula; es decir,* ***F1*** *y* ***F2***

2.1.3. Subfórmulas.

Llamamos *subfórmulas* de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por **F1** y **F2**). Descomponer una fórmula en subfórmulas es una manera de demostrar que efectivamente se trata de una fórmula. La forma más sencilla de hacerlo es mediante árboles genealógicos, que todo el mundo entiende con facilidad. Para que no confundirlos con los árboles lógicos, que se verán después, yo los hago de abajo a arriba, con aspecto de auténtico árbol genealógico.

2.1.4. Forma lógica.

Las fórmulas de nuestro lenguaje L_0 que no son atómicas tienen cinco formas lógicas posibles: negaciones, conjunciones, disyunciones, condicionales y bicondicionales. El saber identificar la *forma lógica* de una fórmula dada es fundamental para manipular el cálculo deductivo correctamente.

2.1.5. Ejercicios:

1. Sin alterar el orden de los signos, transformad las sucesiones de signos siguientes en fórmulas cuya forma lógica sea un condicional, utilizando paréntesis cuando sea necesario.

    a) $p \rightarrow r \leftrightarrow q$
    b) $p \vee r \rightarrow q \vee r$
    c) $p \wedge q \rightarrow p$
    d) $q \rightarrow \neg s \wedge t$
    e) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \rightarrow r$

2. ¿Son fórmulas las siguientes filas de signos?. Caso afirmativo demostradlo en el cálculo de fórmulas, o construid su árbol genealógico.

	Verdadero	Falso
$(p \vee \neg p)$		
$((p \wedge q \rightarrow p)$		
$(((p\neg p) \vee r) \rightarrow r)$		
$(((p \wedge q) \vee r) \rightarrow r)$		
$(((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge q \vee r$		

2.1.6. Formalización.

Este tema tiene una vertiente práctica, la formalización, en la que me gusta insistir, pues considero que es fundamental que se adquiera mucha soltura en el uso del lenguaje simbólico. El que la formalización preceda a la interpretación semántica tiene una justificación: permite una introducción intuitiva de los conectores. Esto no resulta tan sencillo en el caso del condicional, especialmente cuando tiene antecedente falso, pero se pueden poner ejemplos pertinentes (por ejemplo, con una fuerte relación de causalidad entre antecedente y consecuente) para convencernos, al menos de que es preciso adoptar una convención al respecto.

Mi anécdota predilecta para condicionales con antecedente y consecuente falso es la siguiente. Dos periodistas que no se podían ver. El primero publica en el diario local una foto de su hijito disfrazado de rociero, con el siguiente pié:

> *Fotografía del simpático rociero Pepito Ruiz, hijo del brillante escritor D. José Ruiz.*

Al día siguiente aparece, en la misma página, el siguiente insulto rimado:

> *Si tu hijo es rociero y tú un escritor brillante, yo soy Felipe III, Genoveva de Brabante y el hijo del Espartero.*

Los apartados que trataremos son los que siguen:

1. Formalizaciones sencillas: negación.
   Negamos la verdad de un enunciado afirmando su negación. La negación recoge el uso de la partícula “no” del castellano (o cualquiera de sus equivalentes; “no es cierto que”, “no es verdad que”, “nunca”, “jamás”). La interpretación que le daremos será la siguiente:
   La negación de un enunciado verdadero será falsa y la de uno falso será verdadera.

2. Formalizaciones sencillas: conjunción.
   Cuando utilizamos una conjunción entre dos enunciados queremos indicar que ambos son verdaderos. Normalmente usamos la conjunción copulativa, “y” para indicar conjunción, “pero”, “aunque”, “sin embargo” se usan también. Hay un ligero matiz que diferencia estos usos, que se pierde en el lenguaje formal. La interpretación que le daremos será la siguiente:
   La conjunción de dos enunciados es verdadera si y sólo si ambos lo son.

3. Formalizaciones sencillas: disyunción.
   La disyunción que recoge nuestra conectiva es la llamada *incluyente (o no excluyente)*, como cuando en un anuncio **SE SOLICITA SECRETARIA QUE SEPA FRANCÉS O INGLÉS**, que evidentemente no

excluye a la que sepa los dos idiomas. Normalmente se expresa mediante "o", "a menos que", "a no ser que", "y/o". La interpretación que le daremos será la siguiente:
La disyunción de dos enunciados es verdadera si al menos uno de ellos lo es.

4. Formalizaciones sencillas: condicional.
Formalizamos $(A \to B)$ para indicar un enunciado condicional. En este caso A es el antecedente y B el consecuente. En castellano usamos normalmente la expresión "si A entonces B". Se usan también "si A, B", "B, si A", "A es condición suficiente para B", "B es condición necesaria para A", "sólo si B, A". La interpretación que le daremos será la siguiente:
Un enunciado condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en el resto de los casos es verdadero.

5. Formalizaciones sencillas: bicondicional.
Cuando queremos indicar que "A es condición suficiente para B" y que "B es condición necesaria para A" lo formalizamos así: $(A \leftrightarrow B)$. La interpretación que le daremos será la siguiente:
Un enunciado bicondicional es verdadero cuando y sólo cuando sus dos miembros son simultáneamente verdaderos o falsos.

6. Formalizaciones complejas.
Se trata de combinar varios conectores.

Resumen 13 *Lo dicho anteriormente queda resumido en las siguientes tablas, en donde se entiende que los conectores son funciones veritativas (esto es, funciones que asignan valores de verdad a pares de valores de verdad) y que* 1 *y* 0 *corresponden a "Verdadero" y "Falso"*

Conectores binarios.

C	D	$(C \land D)$	$(C \lor D)$	$(C \to D)$	$(C \leftrightarrow D)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(Tabla de los conectores binarios usados en nuestro lenguaje formal; los conectores binarios se interpretan como funciones binarias sobre el conjunto de los valores de verdad $\{1, 0\}$.)

Conector monario.

C	$\neg C$
1	0
0	1

(Tabla del conector monario de negación. Este conector es una función monaria sobre el conjunto de valores de verdad)

2.1.7. Ejemplos y Ejercicios

EJEMPLO 1.- Elegid la formalización adecuada.

1. **Pedro irá al dentista** (p), tanto si **quiere** (q) como si no quiere.
2. **Pienso** (p) luego **existo** (q)
3. No pienso, luego existo.
4. **El fuego** (p) es la causa del **humo** (q)
5. El fuego siempre produce humo.
6. Si **Pedro juega al badminton** (p), **Quiteria también** (q)
7. Sólo si Pedro juega al badminton, juega Quiteria.

	$p \to q$	$q \to p$	$p \to (q \vee \neg q)$	$p \to \neg q$	*
1					★
2	★				
3					★
4		★			
5	★				
6	★				
7		★			

* Ninguna de las anteriores

Comentario 14 *La formalización de (1) es* $(q \vee \neg q) \to p$ *, la de (3)* $\neg p \to q$.

EJEMPLO 2.- Elegid la formalización adecuada.

1. Sólo cuando **llueve** (p) o **hace viento** (q) **la contaminación disminuye** (r).
2. Si **Antonio estudia** (p) pero no **aprueba** (q), entonces **algo falla** (r)
3. **Crecerá la inflación** (p) si **el IVA aumenta** (q) y no **hay contención del gasto** (r)
4. Siempre que **Noemí estudia piano** (p) o **Daniel toca el trombón** (q), **su madre sale de compras** (r)
5. Si **Vargas LLosa escribió** *Lituma en los Andes* (p) pero no **escribió** *La Regenta* (q), entonces **Camilo José cela escribió** *La Colmena* (r)
6. **La magia del cuento se revela** (r) sólo cuando **Pinocho miente** (p) o **Blancanieves muerde la manzana** (q)

	$(p \vee q) \rightarrow r$	$r \rightarrow (p \vee q)$	$p \rightarrow (q \vee \neg q)$	$(q \wedge \neg r) \rightarrow p$	*
1		★			
2					★
3				★	
4	★				
5					★
6		★			

* Ninguna de las anteriores.

Comentario 15 *La formalización tanto de (2) como de (5) es* $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

EJERCICIO 1.- Elegid la (o las) formalización adecuada a la frase siguiente: Excepto cuando **llueve** (p), siempre que **hay nubes** (q) **la temperatura sube** (r) cuando **sopla el levante** (s).

$(q \rightarrow (r \rightarrow (s \wedge \neg p)))$	
$(q \rightarrow ((s \wedge \neg p) \rightarrow r))$	
$(p \rightarrow \neg r)$ Simplificando	
$(r \rightarrow (\neg p \wedge (q \wedge s)))$	

EJERCICIO 2.-

Usando las siguientes claves de formalización, expresad en español lo consignado en las fórmulas:

$p \equiv$ Te han dicho que salgas a la pizarra
$q \equiv$ Debes salir a la pizarra
$r \equiv$ Pedro ha salido a la pizarra
$s \equiv$ Pedro ha sacado un diez en su examen de lógica
$t \equiv$ Debes presentarte al examen
$u \equiv$ Debes estudiar en casa

1. $\neg p \rightarrow \neg q$
2. $r \wedge s$
3. $\neg(r \rightarrow \neg(t \vee u))$
4. $\neg p \rightarrow (t \leftrightarrow u)$
5. $(p \vee u) \rightarrow (q \vee u)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow \neg t$
7. $q \rightarrow (\neg s \wedge t)$
8. $p \rightarrow ((r \leftrightarrow q) \rightarrow r)$

2.1.8. El mundo de Tarski.

Cuando se aprende una segunda lengua se pueden seguir dos métodos muy diferentes:

- Utilizar la lengua propia y hacer traducciones directas e inversas hacia la nueva.
- Aprender a usarla directamente.

El primero es el método tradicional y ha sido el predominante en la enseñanza de la lógica; sin embargo, este método plantea diversos problemas. En el caso de la lógica la dificultad principal estriba en que el lenguaje natural es mucho más complejo que el formal, y con frecuencia las dificultades de formalización radican en el lenguaje natural. Sin pretenderlo transferimos al lenguaje formal una complejidad que no le es propia. Otro problema es que para ser un buen traductor hace falta conocer y dominar bien las dos lenguas, mientras que en nuestro caso se supone que estamos justamente aprendiendo el lenguaje formal.

Estas consideraciones llevaron a los autores de *El mundo de Tarski,* Barwise y Etchemendy, a concebir el mencionado programa, en el que el aprendizaje del lenguaje formal es "directo". Aunque el programa es fundamentalmente para enseñar el lenguaje de la lógica de primer orden y es más interesante en ese caso, hay algunos ejercicios que pueden hacerse en proposicional. Es especialmente recomendable cuando el estudio de la lógica proposicional sea el preámbulo del de la de primer orden. A la información sobre este programa se puede acceder desde nuestra página de ARACNE:

http://aracne.usal.es

2.2. Convenciones sobre notación.

Entre las convenciones acerca de la notación, se suele incluir la supresión de paréntesis. Nosotros no las emplearemos, pues considero que los paréntesis, aunque engorrosos, ayudan mucho a entender las fórmulas. Lo más frecuente es asignar prioridad a los conectores.

Por supuesto, la apariencia gráfica de los conectores es puramente convencional. Los que nosotros usamos son los más frecuentes, pero también se usan:

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
$\sim$	$\&$	$\curlyvee$	$\supset$	$\equiv$
$-$	$\cdot$			$=$

2.3. Glosario.

- **Lenguaje natural (ordinario)** Producidos en la evolución psicológica e histórica; p.e. español, inglés, ruso,...
- **Lenguaje formal (o artificial)** Creados por el hombre, determinando su alfabeto y sus reglas de formación.

- **Metalenguaje y lenguaje objeto** Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el castellano, del mismo modo que utilizamos el castellano para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama **lenguaje objeto** (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, **metalenguaje** (castellano, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el castellano, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.

- **Uso y mención.** Decimos que usamos una expresión cuando la utilizamos como un signo; es decir, cuando ésta se refiere a algo distinto de la propia expresión. Decimos que mencionamos una expresión cuando la utilizamos para referirnos a la expresión misma.

- **Alfabeto.** Por alfabeto podemos entender el conjunto de símbolos que forman las expresiones de un lenguaje. El alfabeto de nuestro lenguaje L_0 de la lógica proposicional contiene dos tipos de signos; a saber, letras proposicionales y conectores.

- **Conectores.** $\neg$ negador, $\vee$ disyuntor, $\wedge$ conyuntor, $\rightarrow$ condicionador y $\leftrightarrow$ bicondicionador.

- **Fórmulas.** Sucesiones finitas de signos del alfabeto construídas conforme a las reglas **F1** y **F2** del cálculo de fórmulas. Reciben los nombres siguientes:

p fórmula **atómica** (o simple) *(Cualquier letra proposicional lo es)*
$\neg A$ **negación,** $(A \vee B)$ **disyunción,** $(A \wedge B)$ **conjunción,**
$(A \rightarrow B)$ **condicional**, $(A \leftrightarrow B)$ **bicondicional**

- **Subfórmulas.** Llamamos subfórmulas de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por F1 y F2).

- **Forma lógica.** Es el tipo de fórmula; es decir, p fórmula **atómica**
  $\neg A$ **negación,** $(A \vee B)$ **disyunción,** $(A \wedge B)$ **conjunción,**
  $(A \rightarrow B)$ **condicional**, $(A \leftrightarrow B)$ **bicondicional**

- **Cálculo (de fórmulas).** Algoritmo (procedimiento efectivo) mediante el cual podemos generar las fórmulas (y justificar que una sucesión determinada de signos del alfabeto lo es)

- **Arbol genealógico (de una fórmula).** Procedimiento de generación de subfórmulas.

- **Inducción semiótica.** Procedimiento mediante el cual se prueba que todas las fórmulas tienen una determinada propiedad (o se define algún concepto para todas las fórmulas.

2.4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lenguaje natural y Lenguaje formal. Lenguaje y Metalenguaje. Uso y Mención. Funciones veritativas.

Se puede encontrar una estupenda explicación de estos conceptos en DEAÑO, A (1978) pág 21 a 27.

También se puede consultar BERGMANN et alts, (1990), pág 49 a 51.

Formalización. Conectores.

En el libro de SUPPES (1975), pág 25-44

El mundo de Tarski

Sirve, de momento, para practicar con el lenguaje proposicional. La pega es que es un lenguaje un poco peculiar ya que las fórmulas atómicas son atómicas, pero de un lenguaje de primer orden.

Capítulo 3

Semántica.

En este tema el concepto fundamental a introducir es el de consecuencia. Como ya dije antes, el objetivo didáctico es que se entienda porqué “$\Gamma \models C$” equivale a que “$\Gamma \cup \{\neg C\}$” es insatisfacible”. Estudiaremos también las propiedades algebraicas de los conectores y sus interrelaciones.

Comentario 16 *En este curso manejaremos tres métodos diferentes para verificar la consistencia (o la consecuencia) de enunciados.* ***Directo****; es decir, usando simplemente las definiciones pertinentes.* ***Árboles (llamados también “tablas semánticas”)****; esto es, construyendo lo que se denomina un árbol lógico, cuyas reglas se especificarán más adelante.* ***Tablas de verdad****; es decir, interpretando adecuadamente las tablas de verdad de las fórmulas implicadas.*

3.1. Introducción.

Contamos con un lenguaje formal, L_0, que nos sirve para formalizar en él las sentencias del castellano. Pero la lógica, definida por algunos como la ciencia de la consecuencia (o del razonamiento válido), necesita precisar qué queremos decir cuando afirmamos que una fórmula C es una consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ (o, lo que es lo mismo, que el razonamiento que toma como hipótesis a las fórmulas de Γ y cuya conclusión es C es un razonamiento válido, correcto, no falaz). Una forma posible de plantearlo es utilizando la formalización. Un razonamiento válido lo es por la estructura interna de los enunciados que contiene, y no lo es en razón de los significados concretos de los términos implicados. Cuando formalizamos realzamos la estructura de los enunciados y los significados de los términos pierden relevancia. Así formalizados es más sencillo ver el esquema seguido. Este esquema ha de producir nuevos razonamientos igualmente válidos. Justamente, lo que caracteriza a un razonamiento válido es que si retraducimos el esquema formal obtenido a una lengua natural, el resultado seguirá siendo un razonamiento válido. Un razonamiento válido nos da la pauta de muchos otros.

Un razonamiento es válido (por ejemplo, $p \wedge q \models p$) porque con independencia de cómo retraduzcamos p y q al castellano, si la traducción de $p \wedge q$ es verdadera, también lo será la de p. Es decir, es inconcebible una situación que haciendo verdadera a $p \wedge q$ haga falsa a p; signifiquen lo que signifiquen p y q. Afortunadamente, aunque esto de la retraducción al castellano es muy ambiguo, la idea es muy simple y no necesitaremos recurrir a traducciones para definir con precisión el concepto de consecuencia.

3.1.1. Ejercicios.-

EJERCICIO 1.- La obscuridad de la noche: Una prueba de la Teoría del Big Bang.

El gran descubrimiento de este siglo es que el universo no es inmóvil ni eterno, como supuso la mayoría de los científicos del pasado. El universo tiene una historia, no ha cesado de evolucionar, enrareciéndose, enfriándose, estructurándose. Esta evolución sucede desde un pasado distante que se sitúa, según las estimaciones, hace diez o quince mil millones de años, cuando el universo está completamente desorganizado, no posee galaxias, ni estrellas, ni moléculas, ni tan siquiera núcleos de átomos...Es lo que se ha llamado el BIG BANG. Una de las pruebas indirectas de esta teoría se puede plantear así:

Si **las estrellas fueran eternas** (p), entonces **la cantidad de luz emitida sería infinita** (q). Si la cantidad de luz emitida fuera infinita, entonces **el cielo debería ser extremadamente luminoso** (r). El cielo es obscuro.
LUEGO: Las estrellas no existieron siempre.

EJERCICIO 2.- Retraducción.

Si el esquema anterior corresponde a un razonamiento correcto; es decir, si $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \models \neg p$, lo seguirá siendo cuando retraduzcamos al castellano p, q y r. Veremos después que este esquema corresponde al del razonamiento de **Lucrecio, siglo I a.c**

Utilizad ahora la retraducción siguiente:
$p \equiv$ **Pedro es culpable**
$q \equiv$ **Quintín es cómplice**
$r \equiv$ **Juan es culpable**
Nos sale así el siguiente razonamiento (sacado de los archivos del inspector Craig, realizado con ayuda del sargento Mc Pherson)
Si Pedro es culpable, entonces Quintín es cómplice.
Si Quintín es cómplice, entonces Juan no es inocente. Juan es inocente.
LUEGO*: Pedro es inocente***.**

EJERCICIO 3.- Lucrecio, filósofo romano. siglo I antes de Cristo.

Lucrecio afirmaba que el universo aún estaba en su juventud. Razonó así: He comprobado desde mi infancia, se dijo, que las técnicas se han ido perfeccionando. Han mejorado el velamen de nuestros barcos, inventado armas más y más eficaces, fabricado instrumentos musicales más refinados...¡Si el universo fuera eterno, todos estos progresos habrían tenido tiempo de realizarse cien, mil, un millón de veces¡

Si el **universo fuera eterno** (p), entonces **todos los progresos se habrían realizado ya** (q). Si todos los progresos se hubieran producido ya, **el mundo estaría acabado, no cambiaría** (r). El mundo cambia.

LUEGO El mundo no existe desde siempre.

3.2. Tablas de verdad.

Aquí se introducirán las tablas de verdad de los conectores, las tablas de verdad para fórmulas cualesquiera y se aprenderá a interpretar el significado de las filas y de las columnas de una tabla. De especial interés es remarcar que en cada fila obtenemos el valor de verdad de la fórmula para la combinación de valores de verdad de sus letras proposicionales. También aquí clasificaremos a las fórmulas en tautologías, antilogías y fórmulas contingentes.

A la pregunta planteada en este apartado (¿por qué las tablas de verdad determinan un único valor de verdad para cada fórmula en función del valor de verdad de sus letras proposicionales?) no puede responderse de otra forma que recurriendo al principio de inducción y haciendo una definición precisa del concepto de interpretación (a partir del de asignación de valores de verdad a las letras proposicionales) siguiendo el esquema de las definiciones por inducción semiótica que ya conoceis.

Conectores binarios.

C	D	$(C \wedge D)$	$(C \vee D)$	$(C \rightarrow D)$	$(C \leftrightarrow D)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(Tabla de los conectores binarios usados en nuestro lenguaje formal; los conectores binarios se interpretan como funciones binarias sobre el conjunto de los valores de verdad $\{1, 0\}$.)

Conector monario.

C	$\neg C$
1	0
0	1

(Tabla del conector monario de negación.)

Tabla de verdad de una fórmula cualquiera, C.

Usando la definición de los conectores que aparecen que en las tablas precedentes, construímos la tabla de verdad de una fórmula cualquiera, C. A la izquierda pondremos las letras proposicionales de la fórmula C, y bajo ellas todas las combinaciones de valores de verdad. Si en la fórmula C hay n letras proposicionales distintas, habrá 2^n combinaciones de valores de verdad. Una manera de evitar que se olviden combinaciones es hacerlo como aparece en los ejercicios siguientes:

p	$(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow p$	$(p \wedge p)$	$(p \vee \neg p)$
1				
0				

p	q	$p \rightarrow (p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \rightarrow p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow (q \wedge \neg q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

p	q	r	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	$(p \vee r) \rightarrow \neg q$
1	1	1		
1	1	0		
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

Clasificación de fórmulas. En razón de sus tablas de verdad clasificamos a las fórmulas en tres grandes categorías: *tautologías, contingentes y contradicciones.* Por supuesto, para expresar que una fórmula cae bajo alguna de estas categorías se usa el metalenguaje.

Tautologías (o válidas) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 1's.

p	q	...	C
1	1		1
⋮			⋮
			1
⋮			⋮

Contingentes son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada por 1's y 0's

p	q	$\cdots$	C
1	1	$\cdots$	⋮
		$\cdots$	1
⋮	⋮	⋮	⋮
			0
⋮	⋮		⋮

Contradiccciones (o antilogías) son las fórmulas cuya tabla de verdad tiene como columna principal una formada exclusivamente de 0's

p	q	...	C
1	1		0
⋮			⋮
			0
⋮			⋮

3.2.1. EJERCICIOS:

Clasificad las fórmulas siguientes: (Tautologías, etc.)

1. $(p \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $p \vee q$
4. $((p \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow \neg r) \rightarrow q$
5. $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$
6. $((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow \neg(p \vee s))$
7. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

8. $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \rightarrow (r \wedge \neg r)$

9. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$

10. $\neg(p \wedge \neg p) \rightarrow (p \wedge p)$

11. $(((p \wedge \neg q) \wedge r) \rightarrow s) \leftrightarrow (\neg s \rightarrow ((\neg p \vee q) \vee r))$

12. $p \rightarrow (p \vee (q \wedge \neg q))$

3.3. Interpretación de L_0.

Las fórmulas de L_0 se interpretan en un universo de dos valores, $\{1, 0\}$ Para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las letras proposicionales. Basada en esa asignación se establece el valor de verdad de una fórmula cualquiera.

ASIGNACIÓN Una asignación es una función f que otorga un valor de verdad a cada letra proposicional; es decir,

$$f : LS \longrightarrow \{1, 0\}$$

INTERPRETACIÓN Dada una asignación f definimos una interpretación $\Im$ extendiendo la función f de forma que otorgue un valor de verdad a cada fórmula del lenguaje formal L_0; es decir,

$$\Im : FORM(L_0) \longrightarrow \{1, 0\}$$

La definición de $\Im$ se hará mediante el procedimiento de inducción semiótica, así:

F1.

$$\Im(p) = f(p)$$

F2.

$$\Im(\neg C) = 1 \quad \text{syss} \quad \Im(C) = 0$$

$$\Im(C \wedge D) = 1 \quad \text{syss} \quad \Im(C) = 1 \quad \text{y} \quad \Im(D) = 1$$

$$\Im(C \vee D) = \quad \text{syss} \quad \Im(C) = 1 \quad \text{o} \quad \Im(D) = 1$$

$$\Im(C \rightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \Im(C) = 0 \quad \text{o} \quad \Im(D) = 1$$

$$\Im(C \leftrightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \Im(C) = \Im(D)$$

3.4. Conceptos clave.

Aquí definimos los conceptos de *satisfacibilidad* de una fórmula y de un conjunto de fórmulas, introducimos la relación de *consecuencia* y su negación (la de *independencia*) y terminamos definiendo la *equivalencia* entre fórmulas. El concepto de *validez* se reducirá al de consecuencia (del conjunto vacío de fórmulas). También, como cuestión terminológica, diremos que una interpretación $\Im$ es un *modelo* de una fórmula (o de un conjunto de fórmulas) en el caso en que la interpretación satisfaga a la fórmula (o a cada una de las fórmulas del conjunto).

Al introducir el concepto de consecuencia hay que hacer hincapie en cómo hemos conseguido precisar la idea intuitiva de razonamiento válido sin tener que recurrir a la retraducción al castellano.

Dado que tenemos que manejar una gran cantidad de conceptos de enorme importancia, su definición será paulatina y sirviéndose de muchos ejemplos y ejercicios de complejidad creciente. Una buena táctica es comenzar por las pruebas de independencia con fórmulas y pasar a las pruebas de independencia, pero con razonamientos escritos en castellano que tienen que ser formalizados. Cuando esteis ya acostumbrados a buscar el contraejemplo, pondremos razonamientos correctos y veremos que es imposible encontrar un contraejemplo: un modelo de las hipótesis y de la negación de la conclusión. Observamos entonces que "$\Gamma \models C$" equivale a "$\Gamma \cup \{\neg C\}$" es insatisfacible; es decir, para comprobar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas podremos emplear un procedimiento refutativo.. A medida que la complejidad de estos ejercicios crece, la necesidad de encontrar un método sistemático de descarte de modelos se hace patente. Entonces el campo está abonado para proponer alguno de los existentes.

Podemos entonces introducir las tablas de verdad para determinar validez y consecuencia y llegar a aburrirnos con los ejercicios de cuatro o más letras proposicionales. Entonces, la necesidad de encontrar un método más eficaz se torna imperiosa y entramos en el apartado siguiente por la puerta del deseo (de encontrar un método mejor).

SATISFACIBILIDAD E INSATISFACIBILIDAD

Definición 17 *Una fórmula C es* ***satisfacible*** *syss hay una interpretación $\Im$ tal que $\Im(C) = 1$.*

Definición 18 *Dada una interpretación $\Im$ tal que $\Im(C) = 1$ decimos que $\Im$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\Im$* ***es modelo*** *de la fórmula C.*

Notación 19 *Es corriente escribir $\Im \models C$ para indicar que $\Im$ es modelo de C.*

Definición 20 *Un conjunto de fórmulas Γ es* ***satisfacible*** *syss hay una interpretación $\Im$ tal que $\Im(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$.*

Definición 21 *Dada una interpretación $\Im$ tal que $\Im(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$ decimos que $\Im$ satisface al conjunto Γ ; o también, que $\Im$* ***es modelo de*** *Γ.*

Notación 22 *Es corriente escribir* $\Im \models \Gamma$ *para indicar que* $\Im$ *es modelo de* Γ.

Comentario 23 *Si el conjunto de fórmulas es finito,* $\Gamma = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$, Γ *es satisfacible syss* $G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n$ *es satisfacible.*

Comentario 24 *El concepto intuitivo correspondiente es, como habreis adivinado, el de coherencia, o compatibilidad de creencias.*

Definición 25 *Una fórmula* C *es* ***insatisfacible*** *syss no es satisfacible; es decir, no hay ninguna interpretación* $\Im$ *tal que* $\Im(C) = 1$.

Definición 26 *Un conjunto de fórmulas* Γ *es* ***insatisfacible*** *syss no hay ninguna interpretación* $\Im$ *tal que* $\Im(G) = 1$ *para cada fórmula* $G \in \Gamma$.

VALIDEZ, CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA.

Definición 27 *Una fórmula* C *es* ***consecuencia*** *de un conjunto de fórmulas* Γ *-y escribimos* $\Gamma \models C$ *- syss todo modelo de* Γ *lo es también de* C*; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de* Γ, *hace verdadera a* C.

Definición 28 *Una fórmula* C *es* ***válida*** *-y escribimos* $\models C$ *- syss* $\emptyset \models C$ *; es decir, toda interpretación hace verdadera a* C.

Definición 29 *Una fórmula* C *es* ***independiente*** *de un conjunto de fórmulas* Γ *-y escribimos* $\Gamma \not\models C$ *- syss* C *no es consecuencia de* Γ *; es decir, hay modelos de* Γ *que no lo son de* C.

EQUIVALENCIA LÓGICA.

Definición 30 *Dos fórmulas* C *y* D *son* ***lógicamente equivalentes*** *si y sólo si*

$$C \models D \text{ y } D \models C$$

Notación 31 *Usaremos el signo* $\equiv$ *para expresar este* ***metaconcepto****, escribiremos* $C \equiv D$

Comentario 32 $\equiv$ *no es el bicondicional del lenguaje* L_0, *que sigue siendo* $\leftrightarrow$, *es una relación binaria entre fórmulas establecida en el metalenguaje.*

3.4.1. EJERCICIOS:

1. En cada uno de los ejercicios siguientes, encontrad fórmulas A y B tales que:
    a) $(A \vee B)$ sea una fórmula contingente
    b) $(A \rightarrow B)$ sea una tautología

   c) $(A \wedge B)$ sea una fórmula contingente
   d) $(\neg A \leftrightarrow B)$ sea una tautología
   e) $(\neg B \rightarrow A)$ sea una contradicción
   f) $(B \rightarrow (B \vee A))$ sea una fórmula contingente

2. Decid si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. Justificad la respuesta.
   a) Si A y B son fórmulas contingentes, entonces $\{A, B\}$ es satisfacible
   b) Si A es una tautología y B es una fórmula contingente, entonces $\{A, B\}$ es satisfacible
   c) A es satisfacible si y sólo si A no es una contradicción
   d) A es satisfacible si y sólo si $\neg A$ es contingente
   e) A es una tautología si y sólo si $\neg A$ es contingente
   f) A es una fórmula contingente si y sólo si $\neg A$ lo es también

3. Si A es una fórmula contingente y B una contradicción
   a) ¿Qué es $(A \vee B)$?
   b) ¿Y $(A \rightarrow B)$?
   c) ¿Y $(A \wedge B)$?
   d) ¿Y $(A \leftrightarrow B)$?

4. Decid si es posible encontrar fórmulas A y B tales que:
   a) $(\neg A \vee B)$ sea una contradicción
   b) $((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$ sea una fórmula contingente
   c) $(A \rightarrow (A \wedge B))$ sea una tautología
   d) $(\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$ sea una tautología

5. Sean A,B y C fórmulas cualesquiera de la lógica sentencial ¿Verdadero o falso?. Justificad la respuesta
   a) Si $\{A, B\}$ es insatisfacible, entonces $\{A\} \models \neg B$
   b) Si $\{A, B\} \not\models C$, entonces$\{A, B\} \models \neg C$
   c) Si $\{A, B\} \models C$ entonces $\{A, B, \neg C\}$ no puede ser satisfacible

3.5. Métodos para determinar propiedades semánticas.

De momento contamos con las definiciones y con el procedimiento de las tablas de verdad para determinar propiedades semánticas. En el capítulo siguiente introduciremos las tablas semánticas y un cálculo de deducción natural.

3.5.1. SATISFACIBILIDAD

Para demostrar que Γ es satisfacible:

- *Directo*: Encontrar una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad:* Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene una fila formada exclusivamente por 1's

Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$

p	q	...	G_1	G_2	...	G_n
1	1					
$\vdots$						
			1	1	...1...	1
$\vdots$						

Comentario 33 *Obviamente, esto equivale a hacer la conjunción* $G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n$

3.5.2. INSATISFACIBILIDAD (OBVIO)

Para demostrar que Γ es insatisfacible:

- *Directo (no tanto):* Demostrar que no hay ninguna interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$
- *Mediante tablas de verdad:* Ver si la tabla de verdad del conjunto Γ contiene en cada fila al menos un 0

Sea $\Gamma = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$

p	q	$\cdots$	G_1	G_2	$\cdots$	G_n
1	1					0
$\vdots$					0	
				0	$\cdots$	
$\vdots$			0			

- *Reducción a una fórmula:* Haces la conjunción, $G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n$ y... ¿qué debe darte?

3.5.3. CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA

Para determinar consecuencia e independencia usaremos el

MÉTODO MATEMÁTICO

¿Quereis conocerlo?

(REDUCCIÓN AL CASO ANTERIOR)

Es decir, usaremos:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \vDash C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \;\; \text{es insatisfacible} \\ \vDash C & \text{syss} & \{\neg C\} \;\; \text{es insatisfacible} \\ \Gamma \nvDash C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \;\; \text{es satisfacible} \end{array}$$

Comentario 34 *La clasificación de fórmulas se efectúa en el metalenguaje, sin embargo, hemos introducido el signo* $\models$ *para expresarlo abreviadamente. No es un signo del alfabeto de la lógica proposicional, es una abreviatura usada en el metalenguaje.* $\models A$ *no es una fórmula de* L_0*, es una expresión que afirma que la fórmula* A *es válida.*

Comentario 35 *Lo de llamar a esto "método matemático" es un chiste; por favor, no le llameis así. (Hace referencia al chiste de cómo fríe un huevo un físico y un matemático.)*

METALENGUAJE

C es válida C es una tautología	$\vDash C$
C no es válida	$\nvDash C$
C es una contradicción C es insatisfacible	$\vDash \neg C$
C es satisfacible $\neg C$ no es válida	$\nvDash \neg C$
C es contingente	$\nvDash C$ y $\nvDash \neg C$

3.6. Calculus ratiocinator.

En las clases prácticas se trabajó con *Calculus ratiocinator,* un programa realizado por el alumno Jorge Hernández para realizar tablas de verdad. El programa clasifica fórmulas (*tautologías, contingentes y contradicciones*) y también determina si una fórmula es o nó *consecuencia* de un conjunto de fórmulas. En cualquiera de los casos nos puede mostrar la tabla de verdad. A la clase práctica vino Jorge y así los alumnos le sugirieron mejoras, especialmente ventanas de ayuda. El programa está disponible, es el trabajo fin de carrera del mencionado alumno, que se presentó en Febrero de 1999.

3.6.1. EJERCICIOS:

1. En los siguientes casos, determinad si Γ es satisfacible o insatisfacible y comprabad los resultados usando *Caluculus*:
    - *a)* $\Gamma = \{(\neg q \land r) \lor (p \lor q),\ p \land r\}$
    - *b)* $\Gamma = \{p \land \neg q,\ \neg(q \lor \neg p),\ (q \land p) \lor (q \lor \neg p)\}$
    - *c)* $\Gamma = \{q \lor (r \lor s), \neg(q \lor r), \neg(r \lor s),\ \neg(s \lor q)\}$
    - *d)* $\Gamma = \{\neg(p \land q) \land \neg(p \land r),\ (q \lor r),\ \neg(p \lor \neg r)\}$
    - *e)* $\Gamma = \{p \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow s,\ p,\ \neg s\}$
    - *f)* $\Gamma = \{p \to (q \land \neg s),\ \neg(s \lor p),\ s \leftrightarrow \neg p\}$
    - *g)* $\Gamma = \{(p \land \neg q) \leftrightarrow s,\ (s \land p) \to \neg(q \lor s)\}$
2. En cada caso determinad si la fórmula es consecuencia de las hipótesis.
    - *a)* $\{\neg q \to \neg r,\ \neg r \to \neg p,\ \neg p \to \neg q\} \models q \leftrightarrow r$
    - *b)* $\{\neg p \land \neg q,\ \neg p \land \neg r,\ (s \land t) \to p\} \models \neg s \lor \neg t$
    - *c)* $\{(p \land q) \lor (r \land \neg s),\ s \to \neg(p \land t)\} \models s \to \neg t$
    - *d)* $\{p \to (\neg q \lor r),\ p \to q,\ \neg(r \lor s)\} \models p \to t$
    - *e)* $\{p \to (q \to r),\ \neg s \to (p \lor r),\ p \to q\} \models s \lor r$

3.6.2. Verificar la corrección de algunos razonamientos:

EJERCICIO 1.- Arquímides y la corona del rey Hierón II de Siracusa.

Cuenta la leyenda que el rey Hierón de Siracusa había encargado una corona de oro macizo al orfebre real y que cuando éste se la entregó dudó seriamente de su honestidad, pidiéndole a Arquímedes que comprobara si efectivamente la corona era de oro puro. Naturalmente, no podía dañar la corona para hacerlo. Arquímedes andaba dándole vueltas al asunto hasta que un día, al entrar en la bañera observó el agua que rebosaba y se le ocurrió una forma de medir el volumen. Cuentan que se puso tan contento, que salió desnudo por las calles de Siracusa gritando Eureka¡¡ ¡ (lo encontré).

Lo que Arquímedes pensó fue:
Pesaría la corona y mediría su volumen midiendo el del agua que desplazara. Tomaría un lingote de oro macizo que pesara lo mismo y mediría también su volumen. Cuando lo hizo y comprobó que el lingote de oro y la corona no desplazaban la misma cantidad de agua supo que habían engañado al rey.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento que seguramente utilizó Arquímedes. Para ello usad lo siguiente:
   $p \equiv$ **El peso de la corona y el lingote es el mismo**
   $q \equiv$ **La corona y el lingote están hechos del mismo material**
   $r \equiv$ **La corona y el lingote tienen el mismo volumen**
   $s \equiv$ **La corona y el lingote desplazan la misma cantidad de agua**.

2. Demostrad que el razonamiento de Arquímedes es correcto.

EJERCICIO 2.- Curso de ética periodística (CQC)

En uno de los cursos de Etica periodística de Alvaro de la Iglesia se analizaba el siguiente titular de periódico:

A ≡La recuperación económica causa del incremento de accidentes de tráfico.
En el curso se decía que si este titular fuera correcto también lo sería el siguiente:
B ≡La Grecia clásica causa del incremento de accidentes de tráfico.
El argumento usado es que B es consecuencia de A, habida cuenta de que:
C ≡Hay recuperación económica si y sólo si se fabrican más coches
D ≡La revolución industrial es la causa de la fabricación de coches
E ≡La Grecia clásica es la causa de la revolución industrial.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento de Alvaro de la Iglesia. Para ello usad lo siguiente:
   $p \equiv$ **Hay recuperación económica**
   $q \equiv$ **Ha habido un incremento de accidentes de tráfico.**
   $r \equiv$**La Grecia clásica existió**
   $s \equiv$ **La revolución industrial existió**
   $t \equiv$ **Se fabrican coches.**
2. Demostrad que el razonamiento es correcto.

EJERCICIO 3.- Amores del lógico Ceferino.

Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿Amas a Queta, a Petra o a Rosana? El pensó:
Los hechos son:
Amo al menos a una de las tres.
Si amo a Petra, pero no a Queta, entonces amo a Rosana.
O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres.
Si amo a Queta, entonces también amo a Petra.
Contestó: Amo a las tres.

1. Formalizad en lógica proposicional el argumento del Lógico Ceferino. Para ello usad lo siguiente:
   $p \equiv$ **Amo a Petra**
   $q \equiv$ **Amo a Queta**
   $r \equiv$ **Amo a Rosana**
2. Determinad si es correcto el razonamiento

EJERCICIO 4.- La paradoja de los tres peluqueros (Lewis Carroll)

Al cabo de un rato, cuando avistábamos la barbería, tío Jim empezó de nuevo. "Mi única esperanza es que esté Carr -*dijo*-, ¡Brown es tan torpe¡ Y la mano de Allen tiembla constantemente desde que tuvo aquel acceso de fiebre."

"Seguro que Carr está" -*dijo tío Joe. Y razonó de la siguiente manera:*

Si **Allen** no **está** (p), **Brown** no **está** (q). *(Desde que estuvo enfermo, no se atreve a salir sólo y se hace acompañar por el aprendiz, Brown)*

Si **Carr** no **está** (r), entonces si Allen no está Brown debe de estar.*(Porque la barbería no puede estar sola)*

LUEGO: Carr debe estar *(El motivo que aduce es que si Carr no estuviera, deberían ser verdaderas dos proposiciones hipotéticas incompatibles.)*

3.7. Nuestros conectores booleanos: algunas propiedades.

En el primer subapartado (**Teorema 1**) demostraremos las principales propiedades booleanas de los conectores $\vee, \wedge$ y $\neg$: asociatividad de $\vee$ y $\wedge$, commutatividad, distributividad, leyes de De Morgan, idempotencia, absorción, doble negación, etc. Posiblemente no sea el momento de acometer el planteamiento algebraico de la lógica, pero se puede decir ahora qué son las álgebras de Boole y cómo las operaciones de esas álgebras tienen las mismas propiedades que nuestros conectores $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Para ello conviene introducir dos constantes veritativas $\perp$ y $\top$ (lo falso y lo verdadero) e indicar que la equivalencia entre fórmulas corresponde a la igualdad en el álgebra.

Por lo que respecta a la interdefinición de los conectores (**Teorema 2**), demostraremos las tautologías correspondientes y, basándonos en el teorema del apartado anterior (el de reemplazo de fórmulas equivalentes), demostraremos que nos bastan dos de ellas (por ejemplo, $\neg$ y $\vee$) para tener un lenguaje igualmente expresivo que el que ya teníamos.

3.7.1. Teorema 1 (Propiedades booleanas de los conectores.)

- **Asociatividad:**
  $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$
  $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$
- **Commutatividad:**
  $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
  $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- **Distributividad:**
  $((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$
  $((A \vee B) \wedge C) \equiv ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$

- **Leyes de De Morgan:**
  $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
  $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
- **Idempotencia:**
  $(A \wedge A) \equiv A$
  $(A \vee A) \equiv A$
- **Absorción:**
  $((A \wedge B) \vee A) \equiv A$
  $((A \vee B) \wedge A) \equiv A$
- **Doble negación:**
  $\neg\neg A \equiv A$
- **Cero y Uno**
  Definamos: $\perp$ y $\top$ (lo falso y lo verdadero) así:
  $\perp \leftrightsquigarrow_{Df} (p \wedge \neg p)$ y $\top \leftrightsquigarrow_{Df} \neg \perp$
  $(A \wedge \top) \equiv A$
  $(A \wedge \perp) \equiv \perp$
  $(A \vee \top) \equiv \top$
  $(A \vee \perp) \equiv A$

3.7.2. Teorema 2
(Interdefinición de los conectores)

Reducción de los conectores a $\neg$ y $\vee$ Para todo C y D :

1. $(C \wedge D) \equiv \neg(\neg C \vee \neg D)$
2. $(C \rightarrow D) \equiv (\neg C \vee D)$
3. $(C \leftrightarrow D) \equiv \neg(\neg C \vee \neg D) \vee \neg(C \vee D)$

Reducción de los conectores a $\neg$ y $\wedge$. Para todo C y D :

1. $(C \vee D) \equiv \neg(\neg C \wedge \neg D)$
2. $(C \rightarrow D) \equiv \neg(C \wedge \neg D)$
3. $(C \leftrightarrow D) \equiv \neg(\neg(C \wedge D) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg D))$

Reducción de los conectores a $\rightarrow$ y $\perp$ Para todo C y D :

1. $\neg C \equiv C \rightarrow \perp$
2. $(C \wedge D) \equiv ((C \rightarrow (D \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$
3. $(C \vee D) \equiv ((C \rightarrow \perp) \rightarrow D)$
4. $(C \leftrightarrow D) \equiv (((C \rightarrow D) \rightarrow ((D \rightarrow C) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$

Capítulo 4

Tableaux semánticos.

4.1. Introducción.

Los tableaux semánticos nos sirven para establecer la satisfacibilidad de una fórmula (o conjunto de fórmulas) y consisten básicamente en el despliegue sistemático de las condiciones de verdad de la fórmula (o fórmulas) en estudio. Tienen el aspecto de árboles (y por seo se les conoce también por ese nombre) cuyas ramas representan las distintas posibilidades. Las ramas se cierran cuando en ellas aparecen contradicciones, entendiéndose que se trata de una posibilidad frustrada. Un árbol completamente desarrollado y con todas las ramas cerradas muestra que la fórmua (o fórmulas) es insatisfacible. Por el contrario, una rama abierta permite definir una interpretación que satisface a la fórmula (o fórmulas) del árbol.

También nos sirven los tableaux para verificar la corrección de un razonamiento. En apartados anteriores hemos insistido en que una forma de demostrar que "$\Gamma \models C$" es demostrar que "$\Gamma \cup \{\neg C\}$" es insatisfacible, que no tiene modelo alguno. Los tableaux semánticos se pueden ver como un procedimiento sistemático de búsqueda de contraejemplo; es decir de una interpretación que sea modelo de Γ pero que no lo sea de C. Puesto que las ramas cerradas significan posibilidades frustradas, un árbol con todas sus ramas cerradas es la demostración de que no hay contraejemplo y, por ende, de que "$\Gamma \models C$" (utilizando $\Gamma \models C$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg C\}$ es insatisfacible). Por otra parte, puesto que un conjunto finito de fórmulas es satisfacible si y sólo si lo es la conjunción de todas ellas, lo único que tenemos que aprender es cómo resolver tableaux de una sola fórmula.

Estas son las características más sobresalientes de los Tableaux

- proporcionan un procedimiento simple e intuitivo para encontrar modelos de las fórmulas satisfacibles y para mostrar que las fórmulas insatisfacibles no tienen modelos.

- igualmente se usan para conjuntos de fórmulas (se hace la conjunción)

- sirven igualmente para demostrar que una fórmula es válida (demostrando que su negación es insatisfacible)
- sirven para verificar la corrección de un razonamiento (se hace el árbol de la negación de un condicional cuyo antecedente es la conjunción de las hipótesis y cuyo consecuente es la conclusión y se comprueba que es insatisfacible)
- en los dos últimos casos funcionan por contradicción...no siempre 'natural'
- son 'automáticas' (para la lógica proposicional) — pueden ser fácilmente implentadas en el ordenador (aunque, a menudo, la eficiencia es pobre en comparación con otros sistemas de prueba)
- son fácilmente generalizables a la lógica de primer orden (ver después) y a otras lógicas (modal, temporal,...)

4.1.1. Contenidos

En lo que sigue trataremos de precisar

- Cómo usar tableaux para analizar fórmulas.
- El conjunto formal de las reglas de los tableau.
- Ejemplos.
- Definiciones de corrección y completud.

Después, en la parte tercera de estas notas, presentaremos **Tableaux para la lógica de Primer Orden**.

- Dado el nivel introductorio del curso se omiten las Prueba de corrección y completud.

Libro de Texto recomendado (es introductorio y muy bonito).

- W. Hodges, *Logic* Pelican (Penguin), 1997.

4.2. Tableaux para la lógica proposicional

Sea A una fórmula proposicional. Construiremos un *tableau para A* empezando con A y aplicando las reglas de los *tableaux.*

Las reglas nos permiten descomponer sistemáticamente a las fórmulas obteniendo como resultado otras fórmulas mas simples Las reglas están diseñadas para que la fórmula 'input' y la (o las) fórmula 'output' signifiquen lo mismo.

La descomposición finaliza cuando o bien se obtienen contradicciones explícitas (tales como B y $\neg B$ o $\neg\top$ o $\bot$) o no se pueden aplicar mas reglas pues todas las fórmulas han sido transformadas.

Si las reglas llevan en todos los casos a una contradicción, A es contradictoria y concluimos que $\neg A$ es válida. Si no, A será satisfacible y podemos extraer del propio árbol un modelo de A.

4.2.1. Las reglas de los Tableau

Hay reglas para cada conectiva y para su negación, y una regla especial para terminar ('cerrar') una rama contradictoria.

- α-reglas (α = 'y'):

1. De $A \wedge B$, se deduce A y B.
2. De $\neg(A \vee B)$ se deduce $\neg A$ y $\neg B$.
3. De $\neg(A \rightarrow B)$, se deduce A y $\neg B$.
4. De $\neg\neg A$, se decuce A.

- β-reglas (β = 'ramificación'):

1. De $A \vee B$, se deduce A y, *en una rama nueva, separada,* B.
2. De $\neg(A \wedge B)$, se deduce $\neg A$ y, *en una rama nueva, separada,* $\neg B$.
3. De $A \rightarrow B$, se deduce $\neg A$ y, *en una rama nueva, separada,* B.

Ejercicio 36 *¿Podeis encontrar una regla adecuada para el bicondicional, $\leftrightarrow$?, ¿Y para la negación del bicondicional? (La solución se dará más tarde.)*

- Regla de cierre:

Cerrar una rama que tenga A y $\neg A$ (para cualquier A), o $\neg\top$, o $\bot$.
(No continuar trabajando con ramas cerradas!)

4.3. Ejemplos

Ejemplo 37 *Empezamos con $A = (\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q$ y llegamos a una contradicción.*

1. $(\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q$

2. $\neg p \wedge \neg\neg q$ — *por la α-regla de $\wedge$ en 1*
3. $\neg q$

4. $\neg p$ — *por la α-regla de $\wedge$ en 2*
5. $\neg\neg q$

6. q — *por la α-regla de $\neg\neg$ en 5*
——— *cerrar la rama (3,6)*

Este es un tableau *cerrado para A, ya que todas sus ramas están cerradas.*

Nota: *Podríamos haber parado en la línea 5, ya que las líneas 3 y 5 son contradictorias.*

4.3.1. Las reglas de los tableau reflejan el significado de las conectivas, I.

Vamos a comentar el ejemplo 37.

Las líneas 4 y 5 ($\neg p$ y $\neg\neg q$) se obtienen aplicando una α-regla de conjunción a la fórmula $\neg p \land \neg\neg q$ situada en la línea 2. La idea es que si el input de la regla, la fórmula $\neg p \land \neg\neg q$, es verdadera (en algún modelo), entonces las fórmulas obtenidas como output, $\neg p$ y $\neg\neg q$, deben ser también verdaderas y vice-versa.

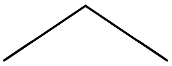
Del mismo modo obtenemos las líneas 2 y 3 a partir de la línea 1 suministrando la conjunción $(\neg p \land \neg\neg q) \land \neg q$ como 'input' y dejando actuar a la α-regla de $\land$. Como output obtenemos las dos fórmulas $\neg p \land \neg\neg q$ y $\neg q$. Observamos que son ambas verdaderas syss la fórmula input es verdadera.

La línea 6 se obtuvo a partir de la 5 aplicando una α-regla a la fórmula $\neg\neg q$. El resultado es la fórmula q, y esta es verdadera syss la fórmula input $\neg\neg q$ es verdadera.

Ejemplo 38 *Empezamos con* $B = (p \lor \neg q) \land q$. *Esta vez no obtenemos una contradicción.*

1. $(p \lor \neg q) \land q$

2. $p \lor \neg q$ *por la* α*-regla de* $\land$ *en 1*
3. q



4. p *5.* $\neg q$ *por la* β*-regla de* $\lor$ *en 2*

rama abierta **rama cerrada**

No se puede desarrollar más la rama izquierda. Este tableau no está cerrado.

Nota. La *única* regla aplicable a la línea 1 es una α-regla, para tratar la $\land$. Esto se debe a que $\land$ es la conectiva dominante en $(p \lor \neg q) \land q$. (Esta fórmula tiene la forma lógica de una conjunción; es decir, es de la forma $A \land B$.)
De la misma manera, la fórmula , $p \lor \neg q$ en la línea 2 tiene la forma de una disyunción ($A \lor B$) y por lo tanto *sólo* puede ser tratada con una β-regla de $\lor$.

4.3.2. Las reglas reflejan el significado de las conectivas, II

Consideremos el ejemplo 38.

Aplicamos una β-regla a la fórmula $p \lor \neg q$ en la línea 2. El 'output' de la regla son las fórmulas p, $\neg q$, *pero en ramas separadas.* ¿Por qué?

La fórmula input $p \lor \neg q$ es verdadera (en un modelo dado) syss *una (o ambas) de* las fórmulas output p, $\neg q$ son verdaderas. Pero podría ser cualquiera de ellas, dependiendo del modelo. No podemos (de momento) eliminar ninguna de las posibilidades. Por lo tanto ponemos la p y la $\neg q$ en *ramas separadas* del tableau, representando las *dos situaciones o casos posibles.*

La verdad de $p \vee \neg q$ implica la verdad de (por lo menos) una de las fórmulas en las ramas y vice-versa.

Usamos las ramas en un tableau para analizar la situación por casos. El estudio de los casos debe ser exhaustivo, pero los casos no son necesariamente mutuamente excluyentes.

Ejemplo 39 *Empezamos con*
$C = \neg(((p \to q) \to p) \to p)$.

1. $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$

2. $(p \to q) \to p$
3. $\neg p$ — α*-regla de* $\neg \ldots \to$ *en 1*

4. $\neg(p \to q)$	*5.* p — β*-regla de* $\to$ *en 2*
6. p — α*-regla de* *7.* $\neg q$ — $\neg \ldots \to$ *en 4*	**rama cerrada (3, 5)**
rama cerrada(3, 6)	

Todas las ramas se cierran. Por lo tanto este tableau está cerrado.

Nota. En la misma rama del árbol nunca descomponemos repetidamente la misma fórmula (No sirve, obtendríamos nuevamente las mismas fórmulas!)

4.3.3. Las reglas reflejan el significado de las conectivas, III.

Fijáos en el ejemplo 39.

Obtenemos las líneas 6 y 7 (p y $\neg q$) aplicando una α-regla a la fórmula $\neg(p \to q)$ de la línea 4. Esta fórmula 'input' es verdadera (en un modelo) syss las fórmulas resultantes, el 'output' p y $\neg q$ son ambas verdaderas. Por tanto, la regla concuerda con el significado de $\neg(\cdots \to \cdots)$.

Las líneas 4 y 5, $\neg(p \to q)$ y p, se obtuvieron aplicando una β-regla a la fórmula $(p \to q) \to p$ de la línea 2. Esta fórmula es verdadera (en un modelo dado) syss al menos una de las fórmulas $\neg(p \to q)$ o p es verdadera. De nuevo, no sabemos cuál. Por lo tanto el tableau se abre, teniendo en cada rama una de las posibilidades.

4.3.4. Solución al ejercicio 3

Cuál sería una buena regla para $\leftrightarrow$*?*

Solución: $A \leftrightarrow B$ es verdadera syss o bien A y B son ambas verdaderas o bien $\neg A$ y $\neg B$ son ambas verdaderas.

Tenemos 2 casos. Por tanto usamos una β-regla:

- De $A \leftrightarrow B$, deducimos A y B y, *en una nueva rama separada,* $\neg A$ y $\neg B$.

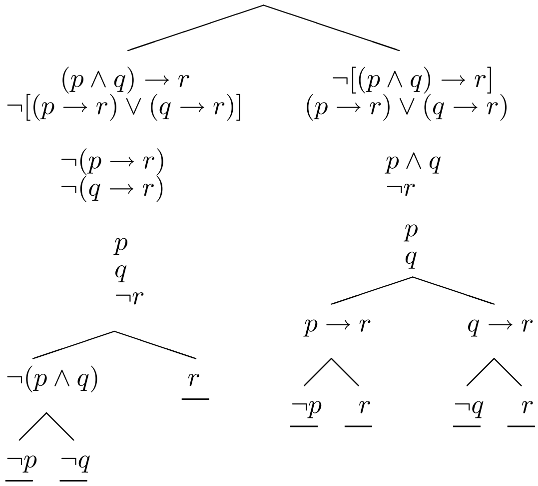
Una buena β-regla para $\neg(\cdots \leftrightarrow \cdots)$ es:

- De $\neg(A \leftrightarrow B)$, deducimos A y $\neg B$ y, *en una nueva rama separada* $\neg A$ y B.

Esto se debe a que $\neg(A \leftrightarrow B)$ es verdadera syss o bien A y $\neg B$ son ambas verdaderas o bien $\neg A$ y B son ambas verdaderas.

Ejemplo 40 *Empezamos con:*

$$D = \neg([(p \land q) \to r] \leftrightarrow [(p \to r) \lor (q \to r)])$$



El tableau está cerrrado.

Ejercicio 41 *Indicad qué reglas se utilizaron y en qué líneas en el tableau precedente.*

4.3.5. Consejos y estrategias:

1. Descomponer primero las fórmulas que no abran ramas; es decir, usar las α-reglas antes que las β-reglas
2. Dar prioridad a la descomposición de fórmulas que cierren ramas
3. Parar cuando el problema esté resuelto (Para demostrar satisfacibilidad basta con encontrar una rama abierta completa)
4. Cuando no sirvan las estrategias anteriores, empezad por las fórmulas más complejas (habrá luego menos ramas en las que desarrollar la fórmula compleja)

Los ejercicios del final sirven para practicar cómo hacer los tableau.

4.3.6. Naturaleza sintáctica de las reglas

Las reglas de los tableaux parecen estar relacionadas con la verdad de las fórmulas (¡claro que lo están!)

De todos modos, *las reglas están expresadas y se usan de forma puramente sintáctica:*

- en términos de la fórma lógica de las fórmulas; es decir, analizando filas de signos
- sin hacer referencia al significado de las fórmulas.

Esto es característico (de hecho necesario) en un sistema formal de prueba. Debe ser 'mecánico' — un ordenador debería ser capaz de *reconocer* una prueba correcta, aunque *construir* una prueba pudiera ser muy complicado para el ordenador.

En los ejercicios anteriores hemos visto (véase, por ejemplo 38) que a cada fórmula sólo se puede aplicar una regla; todo depende de su forma lógica. Así funcionan todas las reglas de los tableaux. Por lo tanto (en lógica proposicional) los tableaux pueden implementarse determinísticamente en un ordenador (Aunque la eficiencia puede ser pobre.)

4.4. Corrección y completud

Uno puede pasar muchas horas haciendo tableaux...¡ ¡¡ Pero esto sería inútil a menos que los tableaux significaran algo para nuestra semántica.

Queremos usar tableaux para determinar propiedades semánticas; validez, satisfacibilidad, consecuencia e independencia.

Los ejemplos sugieren que si hacemos un tableau que empiece con una fórmula A, y todas las ramas se cierran, entonces todos los modos posibles en que A es verdadero son eliminados. Por tanto $\neg A$ debe ser válida

Precisaremos esta idea.

4.4.1. Tableaux cerrados y teoremas

Definición 42

1. *Una* rama *de un tableau es un subconjunto maximal y lineal del tableau. Los ejemplos deberían dejar claro lo que queremos decir. E.g., en el ejemplo 39, las dos ramas son (a) líneas 1, 2, 3, 4, 6, 7, y (b) líneas 1, 2, 3, 5.*
2. *Una rama está* cerrada *si contiene B y $\neg B$, para la misma fórmula B, o si contiene $\bot$ o $\neg\top$.*

3. *Un tableau está* cerrado *si* todas *sus ramas están cerradas.*

4. *Si A es una fórmula, un* tableau de A *es un tableau que empieza con A.*

5. *Escribimos $\vdash A$ (se lee 'A es demostrable', o 'A es un teorema') si existe un tableau cerrado para $\neg A$.*

   Fifaos bien en la $\neg$ aquí. No olvideis jamás esta $\neg$. *Los tableaux prueban validez y consecuencia por refutación.!*

6. *Una fórmula A es* consistente *si no hay un tableau cerrado para A (syss $\nvdash \neg A$).*

4.4.2. Ejemplos de teoremas

- Mostramos en el ejemplo 37 que

$$\vdash \neg((\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q).$$

- Mostramos en el ejemplo 39 que

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p.$$

- Mostramos en el ejemplo 40 que

$$\vdash [(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [(p \to r) \vee (q \to r)].$$

4.4.3. Los teoremas de corrección y completud

Resulta que con este procedimiento podemos probar ($\vdash$) todas y solas las fórmulas válidas:

Teorema 43 *Sea A una fórmula propositional cualquiera .Entonces A es válida syss $\vdash A$.*

La $\Leftarrow$ dirección se llama *corrección:* el sistema de prueba (tableaux) puede *sólo* probar fórmulas que sean válidas. (Podemos confiar en el procedimiento, si hemos demostrado que una fórmula es un teorema, dicha fórmula es válida.)

La $\Rightarrow$ dirección se llama *completud:* podemos probar *cada* fórmula válida. (El método es de aplicabilidad completamente general, sus reglas nos permiten producir todas las fórmulas válidas.)

4.4.4. ¿Por qué el teorema 10 es verdadero?

No probaremos formalmente este importante teorema, pero diremos algo sobre ello.

Corrección: ya hemos dicho que las ramas de un tableau para A explora todas las maneras en que A puede ser verdad en un modelo.

Por lo tanto, si $\vdash A$, entonces hay un tableau cerrado para $\neg A$. Por consiguiente, todas las posibilidades han sido indagadas y todas se han cerrado; ninguna nos ha permitido encontrar un modelo de $\neg A$; es decir, $\neg A$ *no puede* ser verdad nunca. Por lo tanto A debe ser siempre verdadera; es decir, válida.

Completud: si $\not\vdash A$, hagamos un tableau 'completo' para $\neg A$ aplicando *todas las reglas posibles.*

Como $\not\vdash \neg A$, este tableau debe tener una rama abierta. Esta rama es una descripción completa de un modelo en el que $\neg A$ será verdadera. Podemos usar la descripción para construir un modelo de $\neg A$.

Por lo tanto A no es válida.

4.4.5. Decidibilidad algorítmica

Debido a que hay sólo una regla alicable a cada línea dada de un tableau (la exigida por la forma lógica de la fórmula que está en la línea), y que siempre las 'fórmulas output'de cualquier regla son más simples que las fórmulas 'input', se puede programar un ordenador para construir un tableau para cualquier fórmula dada $\neg A$.

El programa terminará en un tiempo finito — o bien porque el tableau se cierra, o porque se ha completado (no se pueden aplicar mas reglas).

Si el tableau se cierra, sabemos que $\vdash A$.

Si no, podemos extraer un modelo de $\neg A$ a partir de una rama abierta, por tanto $\not\vdash A$.

Por lo tanto, se puede programar un ordenador para decidir en un tiempo finito si se da $\vdash A$ (o no), para cualquier fórmula proposicional A.

Veremos que este no es el caso para la lógica de predicados.

4.4.6. Ejemplo de corrección

Ejemplo 44 *Sea* $A = \neg((\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg q)$. *En el ejemplo 37, mostramos que* $\vdash A$. *Por el teorema de corrección 43 sabemos que* A *es válida. Veámoslo.*

Una manera de hacerlo es usando las tablas de verdad Cojamos un modelo cualquiera $\mathcal{M}$ *y veamos que* A *es verdadera en él.*

Queremos ver que $\mathcal{M} \models A$. *Por lo tanto queremos mostrar que* $\neg p \wedge \neg\neg q$ *y* $\neg q$ *no son verdaderas simultáneamente en* $\mathcal{M}$.

Por lo tanto queremos que ver que las tres $\neg p$, $\neg\neg q$, *y* $\neg q$ *no sean verdaderas simultáneamente en* $\mathcal{M}$.

Pero no podemos ni tan siquiera hacer que las dos últimas lo sean: una de ellas debe fallar; o bien $\mathcal{M} \models \neg\neg q$ *o bien* $\mathcal{M} \models \neg q$ *nunca ambas. Puesto que el modelo* $\mathcal{M}$ *es arbitrario,* A *es válida, como dice el teorema 43 .*

4.4.7. Extraer un modelo usando un tableau

Vimos en el ejemplo 38 un tableau para

$$A = (p \vee \neg q) \wedge q$$

con una rama abierta.

Este tableau está 'completo' — no se pueden aplicar mas reglas. Podemos extraer un modelo $\mathcal{M}$ de A a partir de una rama abierta: la rama contiene p y q; por lo tanto $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}(q) = \mathit{1}$. Luego (como se puede probar) $\mathcal{M} \models A$.

4.5. Demostraciones a partir de hipótesis

Definición 45 *Sean A, B fórmulas. Escribimos $A \vdash B$ si hay un tableau cerrado que empieza con las dos fórmulas A y $\neg B$.*

Intuitivamente, $A \vdash B$ 'significa' que podemos probar B si asumimos A como una hipótesis.

Ejemplo 46 *$p \wedge (p \to q) \vdash q$.*

1. $p \wedge (p \to q)$
2. $\neg q$

3. p $\alpha 1$
4. $p \to q$ $\alpha 1$

5. $\neg p$ $\beta 4$ *6.* q $\beta 4$
cerrado(3,5) *cerrado(2,6)*

Notación. En la línea 3, '$\alpha 1$' significa que la línea se obtuvo aplicando una α-regla a la línea 1. En las líneas 5 y 6, '$\beta 4$' significa que se obtuvieron como resultado de aplicar una β-regla a la línea 4. Usaremos notación en ejemplos futuros y en las soluciones de los ejercicios.

4.6. Ejercicios

4.6.1. Práctica en la construcción de tableaux

Probar lo siguiente construyendo tableaux cerrados.

1. $\vdash p \to p$.
2. $\vdash p \vee \neg p$.
3. $\vdash (p \to q) \to (p \to (q \vee r))$.
4. $\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$.

5. $\vdash ((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)$.

6. $\vdash ((p \lor q) \to r) \to ((p \to r) \land (q \to r))$.

7. $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

4.6.2. Otro ejercicio

1. Construir un tableau completo de $A = \neg((p \to q) \to (q \to p))$. Usarlo para encontrar un modelo de A.

4.6.3. Resumen: cómo podemos usar los tableaux

Hemos dicho que podemos usar los tableaux para determinar propiedades semánticas. Por si no ha quedado claro, resumo la situación.

USO DE TABLEAUX PARA DETERMINAR SATISFACIBILIDAD/ INSATISFACIBILIDAD

Tenemos un conjunto Γ de fórmulas y queremos saber si es satisfacible o insatisfacible.

- *Satisfacibilidad:* Hay al menos una rama abierta que permite definir una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$. Reduciremos previamente el conjunto a una sola fórmula (hacemos la conjunción) y construímos su tableau.

- *Insatisfacibilidad:* Todas las ramas están cerradas

USO DE TABLEAUX PARA DETERMINAR CONSECUENCIA/ INDEPENDENCIA

- *Consecuencia:* Para determinar si $\Gamma \models C$ se hace el tableau de $\Gamma \cup \{\neg C\}$ y se comprueba que todas las ramas están cerradas. Reduciremos el conjunto a una sola fórmula, haciendo la conjunción.

- *Independencia:* Para determinar si $\Gamma \not\models C$ se hace el tableau de $\Gamma \cup \{\neg C\}$ y se comprueba que hay al menos una rama abierta. Construímos un modelo usando la rama abierta.

USO DE ÁRBOLES PARA CLASIFICAR FÓRMULAS

Los tableaux lógicos sirven en principio para determinar si una fórmula es o nó satisfacible. Pero si al hacer el tableau de C resulta que queda al menos una rama abierta, siendo por tanto satisfacible, para determinar si se trata de una tautologia o de una fórmula contingente, hemos de hacer el tableau de $\neg C$.

- *Contradicción:* Se hace el tableau de C y se comprueba que todas sus ramas están cerradas.
- *Satisfacible:* Se hace el tableau de C y se comprueba que al menos una rama está abierta y completamente desarrollada.
- *Tautología.* Se hace el tableau de $\neg C$ y se comprueba que todas sus ramas están cerradas
- *Contingente:* Se hace el tableau tanto de C como de $\neg C$ y se comprueba que en ambos casos hay ramas abiertas.

4.7. Tableaux proposicionales

4.7.1. Solución de los ejercccios propuestos

Demostrad lo siguiente construtendo tableaux cerrados.

1. $\vdash p \to p.$

   1. $\neg(p \to p)$

   2. p $\alpha 1$
   3. $\neg p$ $\alpha 1$

   cerrado(2,3)

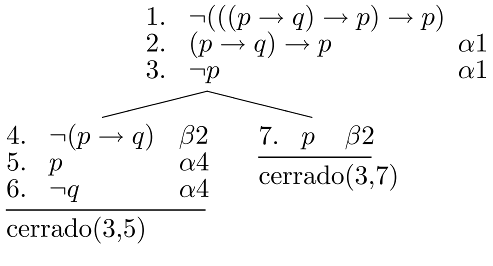
2. $\vdash p \vee \neg p.$

   1. $\neg(p \vee \neg p)$

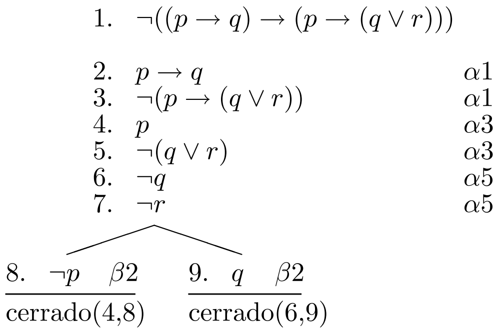
   2. p
   3. $\neg p$

   cerrado(2,3)

3. $\vdash (p \to q) \to p) \to p.$



4. $\vdash (p \to q) \to (p \to (q \vee r)).$

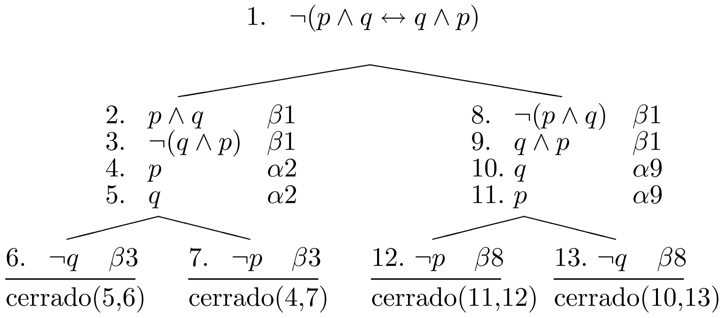


1. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r)))$

2. $p \rightarrow q$ $\alpha 1$
3. $\neg(p \rightarrow (q \vee r))$ $\alpha 1$
4. p $\alpha 3$
5. $\neg(q \vee r)$ $\alpha 3$
6. $\neg q$ $\alpha 5$
7. $\neg r$ $\alpha 5$

8. $\neg p$ $\beta 2$ — cerrado(4,8)
9. q $\beta 2$ — cerrado(6,9)

5. $\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$.



1. $\neg(p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p)$

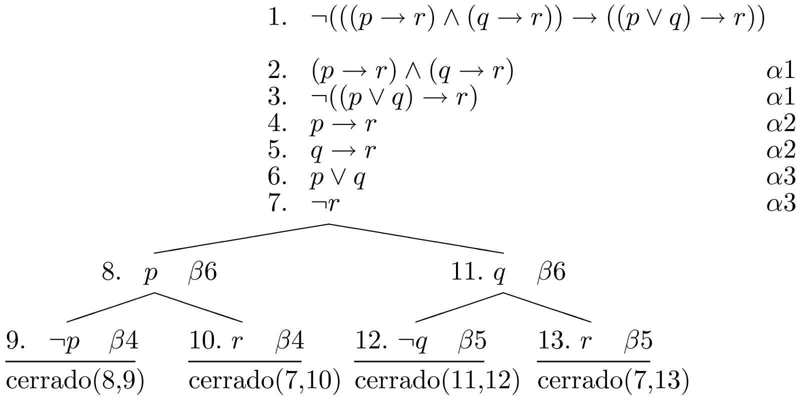
2. $p \wedge q$ $\beta 1$
3. $\neg(q \wedge p)$ $\beta 1$
4. p $\alpha 2$
5. q $\alpha 2$

6. $\neg q$ $\beta 3$ — cerrado(5,6)
7. $\neg p$ $\beta 3$ — cerrado(4,7)

8. $\neg(p \wedge q)$ $\beta 1$
9. $q \wedge p$ $\beta 1$
10. q $\alpha 9$
11. p $\alpha 9$

12. $\neg p$ $\beta 8$ — cerrado(11,12)
13. $\neg q$ $\beta 8$ — cerrado(10,13)

6. $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$.



1. $\neg(((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$

2. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ $\alpha 1$
3. $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$ $\alpha 1$
4. $p \rightarrow r$ $\alpha 2$
5. $q \rightarrow r$ $\alpha 2$
6. $p \vee q$ $\alpha 3$
7. $\neg r$ $\alpha 3$

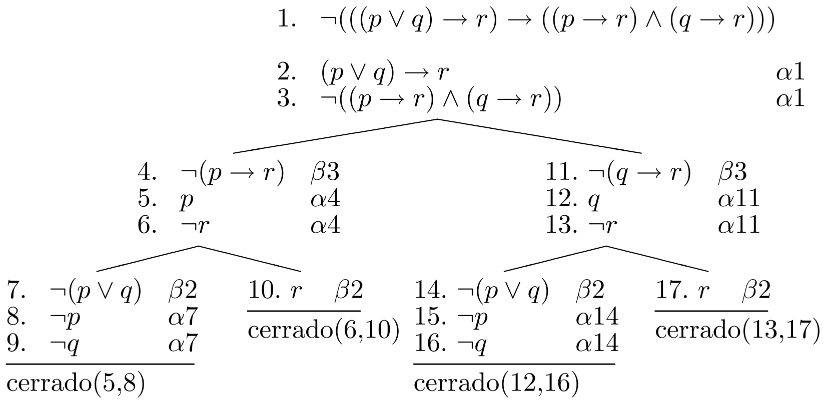
8. p $\beta 6$

9. $\neg p$ $\beta 4$ — cerrado(8,9)
10. r $\beta 4$ — cerrado(7,10)

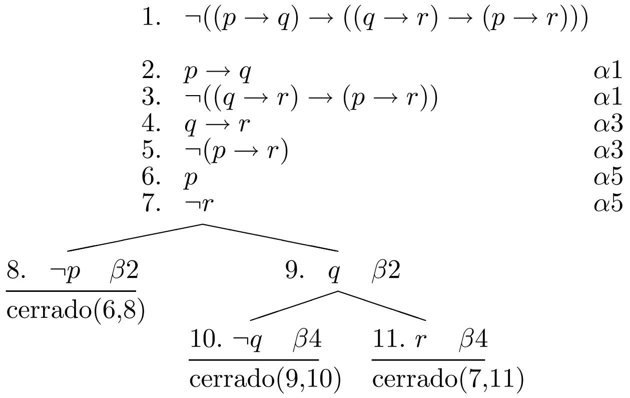
11. q $\beta 6$

12. $\neg q$ $\beta 5$ — cerrado(11,12)
13. r $\beta 5$ — cerrado(7,13)

7. $\vdash ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$.

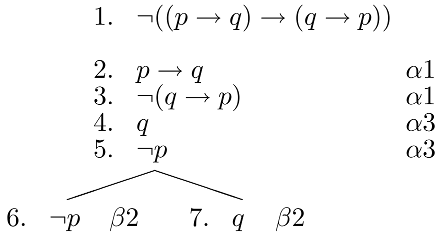


8. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$.



4.7.2. Otro ejercicio

1. Construye un tableau completo para $A = \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$. Ulilízalo para encontrar un modelo de A.



Este tableau no se cierra. No se puede descomponer más, luego está completo. Cada rama abierta proporciona un modelo de $A = \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ — de hecho, el mismo modelo en las dos ramas. Tomad la rama izaquierda (líneas 1–6). Hacemos verdadera a q, puesto que q está sin negar en la rama, y p falsa, puesto que p está negada. Esta interpretación hace verdadera a A (compruébalo!).

4.8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

El libro de texto recomendado, por ser introductorio y muy bonito es el de:

- W. Hodges, *Logic* Pelican (Penguin), 1997.

En los siguientes libros se analiza el método de los tableaux, pero no son tan elementales.

- M. Fitting, *First-order logic and automated theorem proving,* Springer Graduate texts in computer science, 1996.
- R. C. Jeffrey, *Formal logic, its scope and limits,* McGraw Hill, New York, 1967.
- R. M. Smullyan, *First-order logic,* Springer-Verlag, Berlin, 1968. (edición revisada, 1994)

Parte II

Razonamiento Lógico con diagramas de Venn.

Capítulo 5

Teoría Básica de Conjuntos.

5.1. Introducción.

La teoría de conjuntos permite la fundamentación de las matemáticas y la lógica modernas. Es también una herramienta imprescindible para la fundamentación de la Informática, especialmente en los lenguajes de programación. Asimismo es básica en la formalización de los sistemas de lingüística.

La teoría de conjuntos contemporánea es una disciplina muy reciente, con apenas un siglo de existencia a caballo entre las matemáticas y la lógica. Su estudio en profundidad requiere conocimientos amplios de matemáticas y de lógica. Nuestro objetivo en este capítulo no es tan ambicioso. Aquí se pretende sólo presentar las nociones básicas de la teorÍa: las relativas a los conjuntos y sus operaciones. Con ejemplos y ejercicios sencillos para el manejo de estos conceptos. También vamos a usar esas nociones básicas de conjuntos para formalizar enunciados sencillos expresados en español.

5.2. Conjuntos

Seguiremos la idea común de conjunto como una colección de objetos, ya que es la más intuitiva. Es además la definición inicial de Cantor (el padre de la teoría de conjuntos moderna): *”un conjunto es cualquier colección C de objetos determinados y bien distintos x de nuestra percepción o nuestro pensamiento (que se denominan elementos de C), reunidos en un todo”.*

Podemos también considerar que un conjunto coincide con la la colección de objetos que satisface un predicado (la extensión del un predicado).

5.2.1. Nociones básicas.

Hay diferentes maneras de especificar un conjunto. La más común consiste en el uso de llaves $\{\}$ para delimitar la colección de objetos que forman el conjunto.

¿Cómo se determina una colección?

- *Listando los objetos.* De acuerdo con la definición intuitiva, un conjunto queda definido si es posible describir completamente sus elementos. El procedimiento más sencillo de descripción es nombrar cada uno de sus elementos, se llama *definición por extensión;* es conocida la notación de encerrar entre llaves los elementos del conjunto.

Ejemplos:
$\{a, b, c\}$. Es el conjunto formado por la colección de objetos a, b y c.
$\{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash, \odot\}$. Es el conjunto formado exactamente por esos cinco círculos.

El inconveniente para este método de listado o enumeración de los elementos del conjunto es que éstos deben poseer un número finito de elementos y, en la práctica, un número muy pequeño.

¿Qué hacer cuando la colección es infinita, o cuando es finita pero numerosa?

- *Describir los objetos.* Cuando el número de elementos del conjunto es infinito (como el de los número impares) o demasiado numeroso (como el de todas las palabras que pueden formarse con el alfabeto latino) se utiliza el método de *definición por intensión,* que consiste en la descripción de un conjunto como la *extensión de un predicado,* esto es, mediante una o varias propiedades (el predicado) que caracterizan a los elementos de ese conjunto.

Ejemplo:
$\{n : n$ es un número natural$\}$, aquí la especificación del conjunto no tiene ninguna ambigüedad.
Hay variantes de esta notación como puede ser:
$\{m + n : m$ y n son dos números enteros$\}$.
Un conjunto puede describirse de diferentes maneras ya que una colección de objetos puede describirse con diferentes propiedades:
$\{0, 1, 2\} = \{n : n$ es un número natural menor que $3\}$
$\{0, 1, 2\} = \{n : n$ es un número real solución de $x^3 - 3x^2 + 2x\}$
Los símbolos básicos son el de pertenencia $\in$ y el de igualdad $=$. Que x es un elemento del conjunto C se expresa $x \in C$ *(x pertenece a C)* Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, y por ello un elemento no se lista más de una vez en un conjunto ($\{a, b, b, c\} = \{a, b, c\}$.

5.2.2. Ejercicios

Escribe los siguientes conjuntos de la forma $\{x : P(x)\}$
(a) {Junio, Julio}
(b) {Lunes, Martes, Miercoles, Jueves, Viernes}
(c) $\{1, 10, 100, 1000, 10000, ...\}$
(d) $\{ab, bc, cd, de, ef, fg, ...\}$
(e) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..\}$

- *Cardinalidad.* El número de elementos de un conjunto X se indica $|X|$ y se llama *el cardinal de X.*

Igualdad, inclusión y conjunto vacío.

- $x \notin B$ es la abreviación de "*x no pertenece a B*"
- *Inclusión, subconjunto*: $A \subseteq B$ "A está incluido en B" (A es *subconjunto* de B), es una abreviación de todo elemento de A es elemento de B.
- *Inclusión estricta*: $A \subset B$ es una abreviación de que $A \subseteq B$ y $A \neq B$.
- *Conjunto vacío:* $\emptyset$ es la notación para el conjunto que no posee ningún elemento.

5.2.3. Álgebra de conjuntos.

Unión, intersección, diferencia.

- *Unión.* $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o bien } x \in B\}$ Se lee A *unión* B, y está formado por los elementos que están en A o en B. Tanto A como B son subconjuntos de $A \cup B$.
- *Intersección* $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$ A *intersección* B está formado por los elementos que están en A y también en B. Es un subconjunto de A y también de B
- *Diferencia* $A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$ A *menos* B está formado por los elementos que están en A pero no en B

Ejemplos:
$\{a, b, c, d\} \cup \{d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$
$\{a, b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f, g, h\} = \{c, d, e\}$
$\{a, b, c, d, e, f\} - \{a, d, f\} = \{b, c, e\}$
$\{x : x \text{ es múltiplo de } 3\} \cap \{x : x \text{ es múltiplo de } 5\} = \{x : x \text{ es múltiplo de } 15\}$

- Dos conjuntos A y B se llaman *disjuntos* si su intersección es el conjunto vacío ($A \cap B = \emptyset$), es decir si no tienen ningún elemento en común. Aquí se ve un ejemplo de la necesidad formal de disponer del conjunto vacío, ya que $A \cap B = \emptyset$ es una forma no ambigua de expresar esta importante relación entre conjuntos.
  Si A y B son disjuntos y si $|A| = n$ y $|B| = m$ entonces $|A \cup B| = n + m$

Conjunto potencia (o conjunto de las partes de un conjunto)

- *Partes de un conjunto.* $\mathfrak{P}A = \{X : X \subseteq A\}$, *partes de* A está formado por los subconjuntos de A.

Ejemplo:
$\mathfrak{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Obsérvese que tiene 2^3 elementos.

Si $|A| = n$ entonces $|\mathfrak{P}A| = 2^n$.

5.2.4. Ejercicios.

Escribe $A \cup B, A \cap B, A - B, \mathfrak{P}A$ y $\mathfrak{P}A \cap B$ en los casos:
(a)$A = \{a,b,c\}$ y $B = \{b,c,d,e\}$
(b) A={ a,{ a} } y B={ a,b,{ a,b} }
(c) A={ ∅ } y B=∅
(d) A={ ∅ ,{ ∅ } ,{ { ∅ } } } y B={ { { ∅ } } }

5.2.5. Universo de individuos.

Normalmente no estamos interesados en todos los conjuntos posibles, sino en una colección delimitada de objetos, que constituyen nuestro universo de discurso. En tal caso los conjuntos de los que hablemos serán subconjuntos de dicho universo de discurso; por ejemplo, si estamos haciendo un estudio sociológico nuestro universo de discurso son seres humanos y si estamos haciendo un estudio geométrico nuestro universo son puntos. Está claro que el universo de discurso varía en razón del estudio a realizar, pero que para cada caso podemos fijar un universo $\mathcal{U}$.

- *Complementario de un conjunto.* $\sim A = \mathcal{U} - A$. El complemetario de A está formado por todos los elementos que no son de A (pero que son elementos de $\mathcal{U}$.)

Comentario 47 *El complementario de un conjunto está siempre definido en función del universo de discurso, $\mathcal{U}$. Mientras que la unión o diferencia de conjuntos se define sin necesidad de recurrir al universo de discurso, la del complementario no es absoluta; es decir, requiere que se haya fijado previamente el universo.*

5.3. Teoremas fundamentales del álgebra de conjuntos.

En lo que sigue A, B, C son variables que se refieren a conjuntos cualesquiera. Se cumple lo siguiente:

- **Asociatividad:**
  $((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$
  $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$

- **Commutatividad:**
  $(A \cap B) = (B \cap A)$
  $(A \cup B) = (B \cup A)$
- **Distributividad:**
  $((A \cap B) \cup C) = ((A \cup C) \cap (B \cup C))$
  $((A \cup B) \cap C) = ((A \cap C) \cup (B \cap C))$
- **Idempotencia:**
  $(A \cap A) = A$
  $(A \cup A) = A$
- **Absorción:**
  $((A \cap B) \cup A) = A$
  $((A \cup B) \cap A) = A$

Fijemos un dominio $\mathcal{U}$. Ahora podemos definir complementarios. Los conjuntos de los que hablemos serán subconjuntos del universo o dominio.

- **Leyes de De Morgan:**
  $\sim (A \cap B) = (\sim A \cup \sim B)$
  $\sim (A \cup B) = (\sim A \cap \sim B)$
- **Doble negación:**
  $\sim\sim A \equiv A$
- **Cero y Uno**
  Tomemos : $\emptyset$ y $\mathcal{U}$ (el cero y el uno):
  $(A \cap \mathcal{U}) = A$
  $(A \cap \emptyset) = \emptyset$
  $(A \cup \mathcal{U}) = \mathcal{U}$
  $(A \cup \emptyset) = A$

5.4. Más ejercicios sobre Conjuntos.

Los ejercicios que siguen son muy fáciles ya que no se pide demostrar nada, sino elejir la respuesta acertada. Por tratarse de ejercicios que pueden resolverse apelando sólo a las definiciones, esta evidente limitación no es tan dramática. Si este fuera un curso de teoría de conjuntos, el planteamiento sería muy distinto.

EJERCICIO 1. En cada uno de los ejercicios siguientes contesta si (marcando con una cruz en (a)) cuando sea cierto para todos los conjuntos A, B, C. Marcar (b) es contestar que no.

1. Si $A - B = \oslash$ entonces $A \in B$
2. Si $A \in B$ y $B = C$ entonces $A \in C$
3. $A \in \mathfrak{P}A$

4. $AUB \subseteq A$ entonces $B = \oslash$.
5. Si $A \subseteq \sim B$ entonces $A \cap B = \oslash$

	a	b
1		
2		
3		
4		
5		

EJERCICIO 2. En cada uno de los ejercicios siguientes contesta si (marcando con una cruz en (a)) cuando sea cierto para todos los conjuntos A, B, C. Marcar (b) es contestar que no.

1. Si $A - B = \oslash$ entonces $A \subseteq B$
2. Si $A \in \{B\}$ y $B \in \{C\}$ entonces $A \in \{C\}$
3. Si $A \subseteq B - A$ entonces $A = \emptyset$
4. Si $AUB \subseteq A$ entonces $B = \oslash$.
5. Si $A \subset B$ y $B \subset C$ y $C \subset B$ entonces $A = C$
6. Si $A \subseteq \sim B$ entonces $A \cup B = B$
7. $A \subset \mathfrak{P}A$

	a	b
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

EJERCICIO 3. Sea $A = \{\{\oslash\}, a, \{b, c\} \{a\}\}$, ¿son verdaderas las siguientes afirmaciones?

1. $\{\oslash\} \in A$
2. $\{a, \{a\}\} \in A$
3. $\{A\} \subset \mathfrak{P}A$

4. $\{\emptyset, a\} \in A$
5. $\{\{\emptyset\}, \{b, c\}\} \in \mathfrak{P}A$
6. $\{\{\emptyset\}, \{a\}\} \subseteq A$
7. $A \subset A$
8. $\{b, c\} \subseteq A$
9. $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}A$
10. $\{A\} \in \mathfrak{P}A$

	a	b
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

EJERCICIO 4. En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuestas acertada.

1. $A = \{1, 2, 3, \{1\}\} \quad B = \{1, \{1\}\}$
2. $A = \emptyset \quad B = PA$
3. $B = \{A, \{A\}\} \quad A = \{1\}$
4. $A = \emptyset - \{1, 2\} \quad B = \emptyset$
5. $A = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \quad B = \{\langle 1, 2\rangle\}$
6. $A = B \times B \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$
7. $A = B - \{\emptyset\} \quad B = \{1, 2, 3\}$

	$A \in B$	$A \in \{B\}$	$A \subseteq B$	$\{A\} \in B$	$B \subseteq A$	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

(f) Ninguna de éstas.

EJERCICIO 5 En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuestas acertada.

1. $A = \{1, \{1\}, 2, 3\} \quad B = \{1\}$
2. $A = \oslash \quad B = A$
3. $A = \{2, \{2\}\} \quad B = \oslash$
4. $A = A - B$
5. $A = \{1\} \quad B = \{\{1\}\}$
6. $A = A\Delta B$ (donde $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$)
7. $A \in \{B\}$

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

(a) $A \in B$ pero $A \not\subseteq B$ (b) $B \in A$ y $B \subset A$ (c) $A \subset B$ pero $A \notin B$ (d) $A \subset B$ (e) $B \subset A$ (f) Ninguna de éstas.

5.5. Español en Teoría de Conjuntos.

Vamos a utilizar el lenguaje de la teoría de conjuntos para formalizar en él enunciados sencillos. Sólo formalizaremos enunciados en donde se utilicen exclusivamente predicados monarios. Puesto que no hay una forma automática de traducir el español al lenguaje de conjuntos lo veremos con algunos ejemplos.

5.5.1. Ejemplos.

EJEMPLO 1.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegiremos una formalización adecuada. Por supuesto, dicha formalización no es única y también pondremos alternativas (al menos las más evidentes). Como clave de formalización usad la inicial de las palabras.

1. Las raposas no son salmanquesas. $R \subseteq \sim S$ también $R \cap S = \emptyset$
2. Todos los ruidosos están sordos. $R \subseteq S$ también $R - S = \emptyset$

3. Algunos saltamontes son radioactivos. $R \cap S \neq \emptyset$ también $R \not\subseteq \sim S$
4. Algunos niños respetuosos no saludan. $R \cap \sim S \neq \emptyset$
5. No todos los reptiles son serpientes. $R \not\subseteq S$ también $R \cap \sim S \neq \emptyset$
6. No todos los remeros son silenciosos. $R \cap \sim S \neq \emptyset$ también $R \not\subseteq S$
7. Algunos no rebuznan, pero silban. $\sim R \cap S \neq \emptyset$ también $R - S \neq \emptyset$

EJEMPLO 2.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegiremos la (o las) respuesta acertada. (Utlizaremos los relatores R y S; es decir, las claves de formalización son las iniciales.)

1. Ningún renacuajo es un saltamontes.
2. Todo son refranes o sermones.
3. No todos los que repiten saben.
4. Algunos no son sacristanes o no son racistas.
5. Los roedores no todos son simpáticos.
6. Todos los radicales son solemnes.
7. Ningún rebelde es sifilítico.

	$R \subseteq S$	$R \not\subseteq S$	$\sim (R \cup S) = \emptyset$	$\sim (R \cap S) \neq \emptyset$	$R \cap S = \emptyset$	f
1					★	
2			★			
3		★				
4				★		
5		★				
6	★					
7					★	

Ninguna.

EJEMPLO 3.- Elegiremos la formalización adecuada. Como claves de formalización usaremos las indicadas entre paréntesis.

1. El hombre (H) es el único animal (A) que tropieza dos veces en la misma piedra (T)
2. Los tigres (T) y los armadillos (A) huyen del fuego (H).
3. Sólo los tontos (T) y los analfabetos (A) hacen quinielas (H).

4. Los huracanes (H) arrancan los árboles (A) y tumban las casas (T).
5. Ningún tiburón (T)está seguro de su buena preparación (A) a menos que tenga tres filas de dientes (H).
6. Ningún animal (A) sin cuernos (H) puede lanzarlo a uno contra una puerta (T).

	$H \subseteq T \cap A$	$T \cup A \subseteq H$	$H \subseteq T \cup A$	$T \cap A \subseteq H$	$T \cap \sim H \subseteq \sim A$	f
1				★		
2		★				
3			★			
4	★					
5					★	
6						★

f. Ninguna.

5.5.2. Ejercicios.

Para poner en práctica lo aprendido os propongo los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1. En cada uno de los siguientes ejemplos elegid su representación en teoría de conjuntos.

1. Algunos asesinos (D) no tienen remordimientos (B).
2. Los conejillos de indias (C) son desesperadamente ignorantes en cuestiones musicales (D).
3. Nadie que sea desesperadamente ignorante en cuestiones musicales (D) guarda nunca silencio cuando se está interpretando la sonata “Claro de Luna” (S).
4. Algunos conejillos de indias (C) no aprecian a Beethoven (B)
5. Todos los asesinos (D) tienen remordimientos (B).
6. Algunos asesinos no son mentirosos (C).
7. Nadie que aprecie realmente a Beethoven (B) deja nunca de guardar silencio cuando se está interpretando la sonata ”Claro de Luna” (S).

	$\sim B \cap C \neq \oslash$	$\sim (B \cup \sim D) \neq \oslash$	$C \cap \sim D = \oslash$	$B \subseteq S$	$D \subseteq \sim S$	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 2. En cada uno de los siguientes ejemplos elegid su representación en teoría de conjuntos (Al formalizar, usad las iniciales de las palabras).

1. Sólo las algas y los batracios crecen en aquel lugar.
2. Todos están alicaídos y bizquean notoriamente.
3. Los asesinos no estaban borrachos.
4. Los asesinos toman café.
5. Algunos borrachos toman café.
6. Algunos asesinos toman café.
7. Los alicantinos y los barceloneses son unos cabezotas.

	$A \cap C \neq \oslash$	$\sim B \cup \sim A = \oslash$	$A \cap \sim C = \oslash$	$C \subseteq A \cup B$	$A \cup B \subseteq C$	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 3.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid su representación en teoría de conjuntos.

1. Un pez (P) que no sea capaz de bailar un minuto (B) es despreciable (D).
2. Los conejillos de indias (C) son desesperadamente ignorantes en cuestiones musicales (D).
3. Ningún pez despreciable puede bailar un minuto.
4. Ninguna rana (B) es poética (C).
5. Algunos ánades (D) están desprovistos de poesía.
6. Ningún oficial (D) declina nunca una invitación a bailar el vals (B).
7. Algunos ánades (D) no son ranas (B).

	$P \cap D \subseteq \sim B$	$C \cap \sim D = \oslash$	$P \cap \sim B \subseteq D$	$C \cap D = \emptyset$	$D \cap \sim B = \emptyset$	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

5.6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros de Tería de Conjuntos hay muchos, aunque a este nivel tan elemental no conozco ninguno. Tal vez lo más elemental que conozco sean los tres capítulos del libro de lógica de Suppes

- Suppes [1972] Lógica simbólica. CECSA. México.

Mis favoritos son

- Enderton [1977] Elements of Set Theory. Academic Press. New York
- Devlin [1997] The Joy of Sets. Springer Verlag. New York

Muchos de los ejercicios son del libro de Carroll

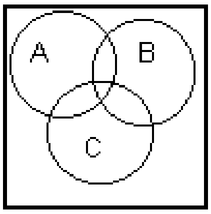
- Carrol [1972] El juego de la lógica. Alianza Editorial. Madrid

Capítulo 6

Diagramas de Venn.

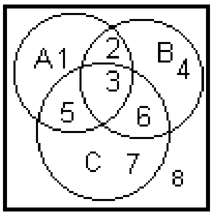
6.1. Álgebra de conjuntos con diagramas de Venn.

Los diagramas de Venn son una buena alternativa didáctica para la representación de conjuntos y los enunciados que expresan relaciones entre ellos. La forma habitual de hacerlo es trazar un rectángulo que representa el universo de discurso y dentro de él figuras cerradas (normalmente círculos o elipses) que representan los conjuntos. Así para representar los conjuntos abstractos A, B y C usaremos este diagrama:



En este diagrama aparecen delimitadas ocho zonas marcadas con números. Dichas zonas corresponden a los siguientes conjuntos:

Zona 1. $A - (B \cup C)$
Zona 2. $(A \cap B) - C$
Zona 3. $A \cap B \cap C$
Zona 4. $B - (A \cup C)$
Zona 5. $(A \cap C) - B$
Zona 6. $(B \cap C) - A$
Zona 7. $C - (A \cup B)$
Zona 8. $\sim (A \cup B \cup C)$



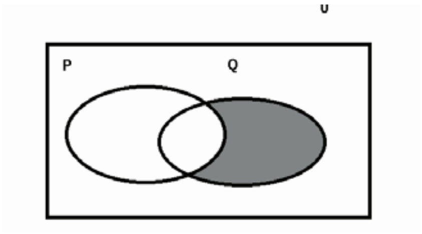


Figura 6.1:

Los elementos de A pueden estar en 1, 2, 3 o 5. Los elementos de B en 2,3 4 o 6, etc. En 8 están los elementos del universo que no están en ninguno de los conjuntos A, B, C.

En principio trazaremos dichas figuras de forma que tengan zonas comunes y la información adicional que los enunciados nos suministren la llevaremos al diagrama usando estas convenciones:

1. Sombrearemos en el diagrama las zonas vacías.
2. Usaremos cruces entrelazadas para indicar la existencia de elementos en una zona.
3. Las zonas de las que carecemos de información permanecerán sin sombras ni cruces.

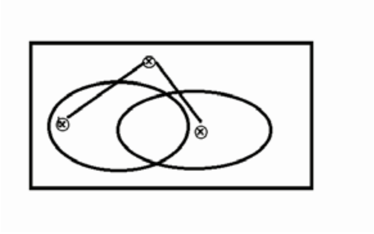
De esta forma el diagrama contendrá no sólo a las figuras que representan conjuntos, sino también a las expresiones algebraicas que nos dicen qué relación guardan entre sí los conjuntos representados.

6.1.1. Ejemplos

Esto lo veremos con unos cuantos ejemplos.

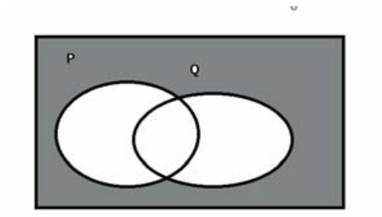
EJEMPLO 1.- Para expresar en el diagrama que $Q \subseteq P$ sombrearemos en el diagrama $Q - P$.

EJEMPLO 2.- Para indicar en el diagrama que $\sim (P \cap Q) \neq \emptyset$ pondremos una pequeña marca en todas aquellas zonas que constituyen $\sim (P \cap Q)$ y uniremos estas marcas entre sí. La razón es que sabemos que fuera de $P \cap Q$ hay al menos un elemento, pero no sabemos exactamente donde.



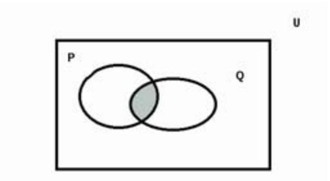
EJEMPLO 3.- Por supuesto, un mismo diagrama corresponde a diversas expresiones conjuntistas equivalentes. Así a las cinco expresiones conjuntistas que siguen les corresponde el mismo diagrama, como vemos en la figura:

(1) $\sim P \subseteq Q$
(2) $P \cup Q = U$
(3) $\sim (P \cup Q) = \emptyset$
(4) $\sim P \cap \sim Q) = \emptyset$
(5) $\sim Q \subseteq P$



EJEMPLO 4.- De forma similar al ejemplo anterior, las expresiones conjuntistas siguientes tienen una misma representación en un diagrama, como vemos en la figura:

(1) $P \cap Q = \emptyset$
(2) $P \subseteq \sim Q$
(3) $Q \subseteq \sim P$



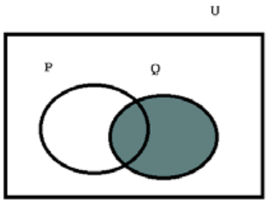
6.1.2. Diagramas consistentes e inconsistentes.

Usando los diagramas es fácil ver qué conclusiones se pueden extraer de los datos obtenidos de dos o más diagramas. Lo que haremos es superponer los diagramas de dichos datos y analizar el resultado. Decimos que un diagrama es inconsistente cuando aparecen sombreados y cruces entrelazadas y al menos para un entrelazado sucede que cada cruz del mismo está sombreada. Naturalmente, el diagrama es consistente en el resto de los casos. Es decir, no hay cruces y entrelazados coincidentes o ninguno de los entrelazados está completamante sombreado.

6.1.3. Ejemplos

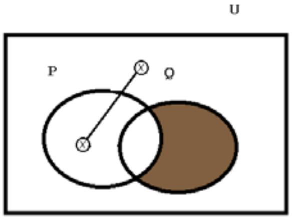
Lo veremos con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.- Si sabemos que $Q \subseteq P$ (véase el anterior EJEMPLO 1.) y que $P \cap Q = \emptyset$ (véase el anterior EJEMPLO 4.), concluímos que $Q = \emptyset$. Gráficamente este resultado lo obtenemos superponiendo los diagramas anteriores.



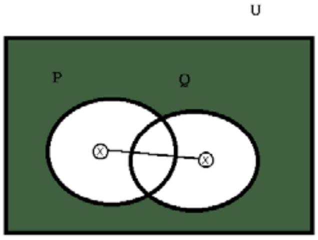
Este diagrama es consistente, llegar a la conclusión de que un conjunto es vacío no es ninguna contradicción.

EJEMPLO 2.- Si sabemos que $Q \subseteq P$ y que $\sim (P \cap Q) \neq \emptyset$ (véase el anterior EJEMPLO 3), al superponer los diagramas obtenemos este otro:



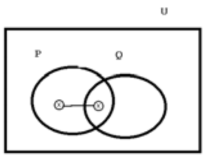
Este diagrama tampoco es inconsistente, Ahora sabemos que $\sim Q \neq \emptyset$ (que es más específico e informativo que $\sim (P \cap Q) \neq \emptyset$). Por supuesto, $Q \subseteq P$ se sigue manteniendo.

EJEMPLO 3.- Al superponer los diagramas del EJEMPLO 2 y del 4 obtenemos el diagrama siguiente:

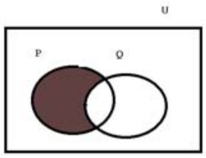


Ahora sabemos que $P \triangle Q \neq \emptyset$ y que $\sim P \subseteq Q$. Tampoco este diagrama es inconsistente.

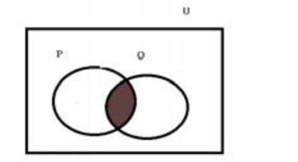
EJEMPLO 4.- La superposición de los diagramas correspondientes a $P \neq \emptyset$, $P \subseteq Q$ y $P \subseteq \sim Q$ es inconsistente.



$P \neq \emptyset$



$P \subseteq Q$



$P \subseteq \sim Q$

El resultado final es el siguiente:

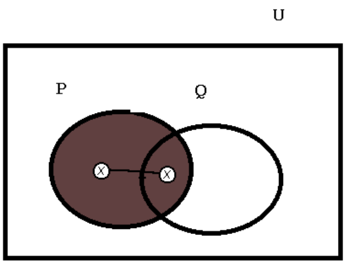


Diagrama final

Este diagrama final es inconsistente: no es posible que haya y no haya a un tiempo elementos en una zona.

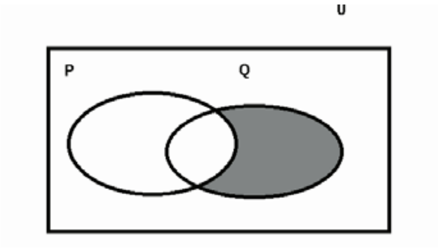
6.1.4. Modelos que satisfacen diagramas.

En un diagrama de Venn hay una representación abstracta de los conjuntos y sus relaciones, pero siempre que el diagrama sea consistente podemos construir realizaciones o modelos de lo representado en el diagrama. A un mismo diagrama le corresponden infinitas realizaciones o modelos. Lo que haremos es especificar un universo $\mathcal{U}$ y definir en él los conjuntos, respetando la información suministrada por el diagrama; dejamos sin elementos las zonas sombreadas y situamos a nuestro antojo elementos en las zonas con cruces,.en las zonas sin cruces ni sombras podemos poner elementos o no ponerlos.

6.1.5. Ejemplos

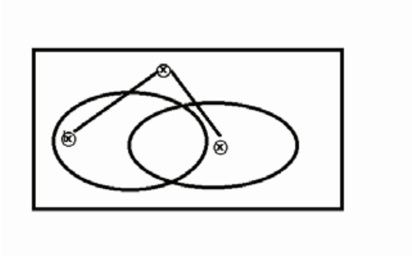
La mejor manera de verlo es mediante ejemplos sencillos.

EJEMPLO 1.- En los cuatro apartados que siguen pondremos algunos modelos de este diagrama.



1. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \{1,2\}$ $Q = \{2\}$
2. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \emptyset$ $Q = \emptyset$
3. $\mathcal{U} = \{n : n \text{ es un número natural}\}$ $P = \{n : n \text{ es un número par}\}$ $Q = \{n : n \text{ es múltiplo de cuatro}\}$
4. $\mathcal{U} = \{x : x \text{ es un país}\}$ $P = \{x : x \text{ es un país mediterráneo}\}$ $Q = \{\text{España, Italia}\}$

EJEMPLO 2.- En los cuatro apartados que siguen pondremos modelos de este diagrama.



1. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \{1\}$ $Q = \{2\}$
2. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \emptyset$ $Q = \emptyset$
3. $\mathcal{U} = \{\text{Juan, Pedro, Marta, Rodrigo}\}$ $P = \{\text{Juan, Pedro}\}$ $Q = \emptyset$
4. $\mathcal{U} = \{x : x \text{ es un país}\}$ $P = \{\text{Francia, Holanda}\}$ $Q = \{\text{España, Italia}\}$

EJEMPLO 3.- En los cuatro apartados que siguen pondremos modelos de este diagrama.

1. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \{1,2\}$ $Q = \{3\}$

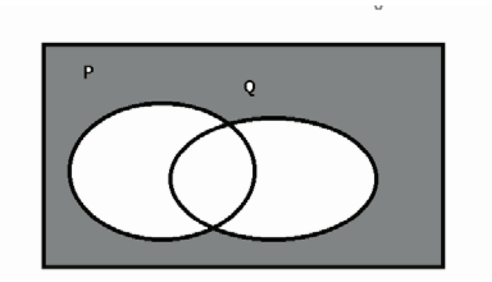
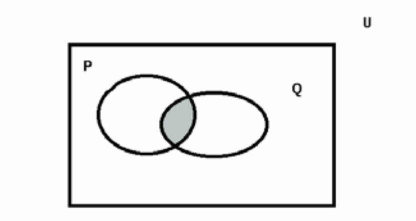


Figura 6.2:

2. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \emptyset$ $Q = \{1,2,3\}$
3. $\mathcal{U} = \{x : x$ es un número natural$\}$ $P = \{x : x$ es un número par$\}$ $Q = \{x : x$ es un número impar$\}$
4. $\mathcal{U} = \{x : x$ es un ser vivo$\}$ $P = \{x : x$ tiene 10 años o menos$\}$ $Q = \{x : x$ tiene más de siete años$\}$

EJEMPLO 4.- En los cuatro apartados que siguen pondremos modelos de este diagrama.



1. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \{1,2\}$ $Q = \{3\}$
2. $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ $P = \emptyset$ $Q = \{1\}$
3. $\mathcal{U} = \{x : x$ es un número natural$\}$ $P = \{x : x$ es un divisor de 24$\}$ $Q = \{x : x$ es un divisor de 91$\}$
4. $\mathcal{U} = \{x : x$ es un ser vivo$\}$ $P = \{x : x$ tiene 10 años o menos$\}$ $Q = \{x : x$ tiene más de diez años$\}$

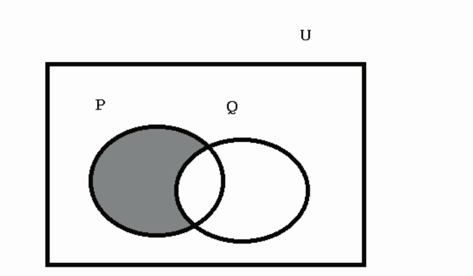
6.2. Expresiones en español correspondientes a un diagrama.

Nosotros formalizábamos en Teoría de Conjuntos algunas expresiones del español. Puesto que a las expresiones de Teoría de Conjuntos las representamos con diagramas, podemos también adjudicar directamente diagramas a los enunciados del español.

6.2.1. Ejemplos

Ejemplo 1.- Todas las expresiones que siguen pueden formalizarse en Teoría de Conjuntos como $P \subseteq Q$. Por consiguiente a todas ellas les corresponde el mismo diagrama, el que aparece en la figura:

1. Todas las avispas (P) son hoscas (Q).
2. Los niños (P) dicen la verdad (Q).
3. Ningún niño miente.
4. Son los apodos (P) sutilezas prontas (Q).
5. Nadie entraba en la academia de Platón (P) a menos que supiese geometría (Q).
6. Nadie era verdadero revolucionario (P) a menos que fuera anti-stalinista (Q).
7. El perro (P) es un buen amigo del hombre (Q).



EJEMPLO 2.- Todas las expresiones que siguen pueden formalizarse en Teoría de Conjuntos como $P \cap Q = \emptyset$. Por consiguiente a todas ellas les corresponde el mismo diagrama, el que aparece en la figura:

1. Ningún país que haya sido explorado (P) está infestado de dragones (Q).
2. Los países explorados no están infestados de dragones.
3. Los países infestados de dragones están sin explorar.
4. No hay círculos (P) cuadrados (Q).

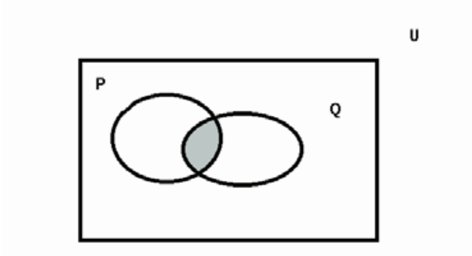


Figura 6.3:

6.3. Razonamientos con diagramas.

En este apartado veremos que los diagramas pueden usarse no solamente para representar enunciados, sino también como un procedimiento de prueba. Es decir, podemos verificar si un razonamiento es o nó correcto utilizando diagramas. Se tratará sencillamente de superponer diagramas y comprobar si el diagrama resultante es o no consistente. El procedimiento es como sigue:

- En diagramas separados representaremos las hipótesis.
- En otro diagrama representamos la negación de la conclusión del razonamiento.
- Unificamos en un mismo diagrama tanto los de las hipótesis como el de la negación de la conclusión.
- Comprobamos si el diagrama resultante es consistente o inconsistente.
- Caso de ser inconsistente, concluímos que el razonamiento es correcto
- Caso de ser consistente, definimos un modelo del diagrama.

Se trata de un procedimiento de prueba refutativo. Un razonamiento es correcto cuando no podemos imaginar ninguna situación en la que las hipótesis del razonamiento sean verdaderas y la conclusión sea falsa; es decir, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión sea inconsistente. Nosotros trasladamos a diagramas tanto las hipótesis como la negación de la conclusión y lo que tenemos que verificar es que ello resulta en un diagrama inconsistente. Si al llevar al diagrama tanto las hipótesis como la negación de la conclusión el diagrama resulta consistente, podemos definir con su ayuda un modelo en donde las hipótesis del razonamiento sean verdaderas y la conclusión falsa; de esta forma encontramos un contraejemplo para rebatir la argumentación propuesta.

6.3.1. Ejemplos

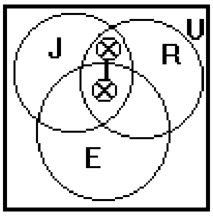
Lo veremos con algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Mediante diagrmas de Venn determinamos si es correcto el razonamineto siguiente.

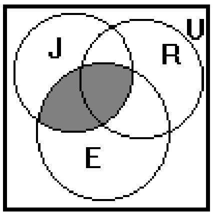
Hipótesis 1.- $J \cap R \neq \emptyset$

Hipótesis 2. $E \cap J = \emptyset$

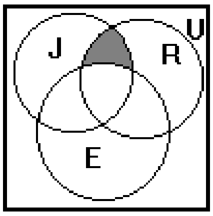
Conclusión. $(J \cap R) \cap \sim E \neq \emptyset$



Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada

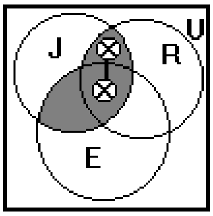


Diagrama final.

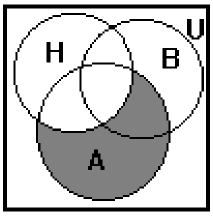
Diagrama	Consistente	
	Inconsistente	★
Razonamiento	Correcto	★
	Incorrecto	

EJEMPLO 2.- Mediante diagrmas de Venn determinamos si es correcto el razonamiento siguiente.

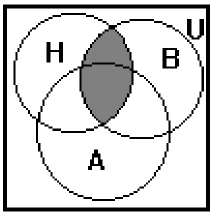
Hipótesis 1.- $A \subseteq H$

Hipótesis 2. $H \subseteq \sim B$

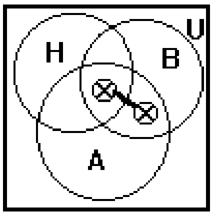
Conclusión. $A \cap B = \emptyset$



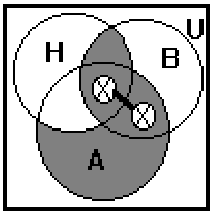
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada



Digrama final.

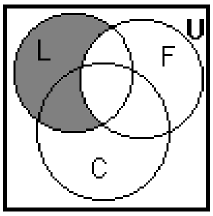
Diagrama	Consistente	
	Inconsistente	★
Razonamiento	Correcto	★
	Incorrecto	

EJEMPLO 3.- Mediante diagrmas de Venn determinamos si es correcto el razonamineto siguiente.

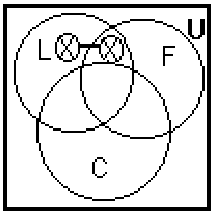
Hipótesis 1.- $L \subseteq F$

Hipótesis 2. $L \cap \sim C \neq \emptyset$

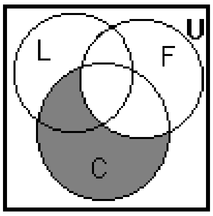
Conclusión. $C \cap \sim F \neq \emptyset$



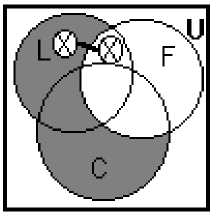
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada



Digrama final.

Diagrama	Consistente	★
	Inconsistente	
Razonamiento	Correcto	
	Incorrecto	★

Puesto que el diagrama final es consistente, construímos un modelo que cumpla las especificaciones del mismo.

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$
$F = \{a, b, c\}$
$C = \{a, b\}$
$L = \{a, c\}$

Se observa que en este modelo se cumplen las hipótesis, pues:

(1) $\{a, c\} = L \subseteq F = \{a, b, c\}$
(2) $\{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \neq \emptyset$ $(L \cap \sim C \neq \emptyset)$

Pero la conclusión $(C \cap \sim F \neq \emptyset)$ falla, pues:
$\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

6.3.2. Ejercicios

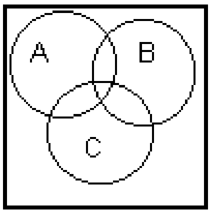
Para practicar lo aprendido, os propongo los ejercicios siguientes.

EJERCICIO 1. Mediante diagramas de Venn determinad si el razonamiento siguiente es correcto:

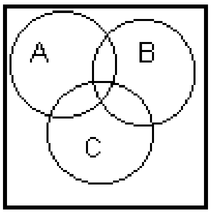
Hipótesis 1. Ninguna rana (A) es poética (B).

Hipótesis 2. Algunos ánades (C) están desprovistos de poesía.

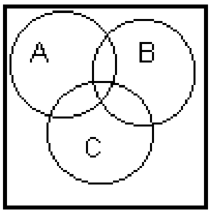
Conclusión. Algunos ánades no son ranas.



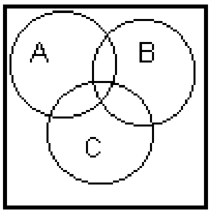
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada.



Digrama final.

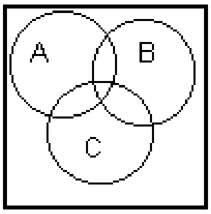
Diagrama	Consistente ☐ Inconsistente ☐
Razonamiento	Correcto ☐ Incorrecto ☐

EJERCICIO 2. Mediante diagramas de Venn determinad si el razonamiento siguiente es correcto:

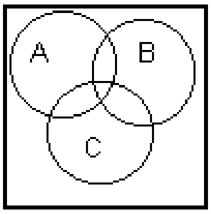
Hipótesis 1. Los asesinos (A) no estaban borrachos (B).

Hipótesis 2. Los asesinos toman café (C).

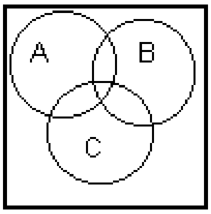
Conclusión. Algunos borrachos toman café.



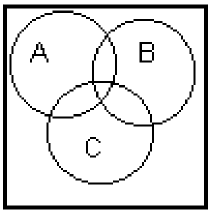
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada.



Digrama final.

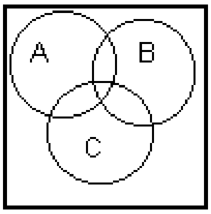
Diagrama	Consistente ☐ Inconsistente ☐
Razonamiento	Correcto ☐ Incorrecto ☐

EJERCICIO 3. Decidid mediante diagramas si el siguiente argumento es correcto:

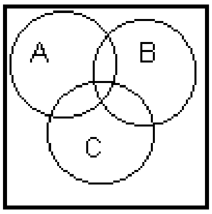
Hipótesis 1. Ningún radical (A) es optimista (B)

Hipótesis 2. Ningún optimista es solemne (C).

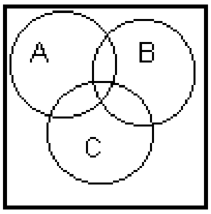
Conclusión. Todos los radicales son solemnes.



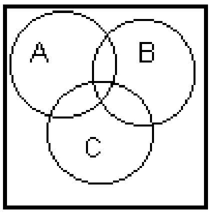
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada.



Digrama final.

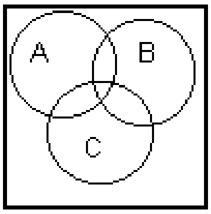
Diagrama	Consistente ☐ Inconsistente ☐
Razonamiento	Valido ☐ Inválido ☐

EJERCICIO 4.- Decidid mediante diagramas si el siguiente argumento es correcto:

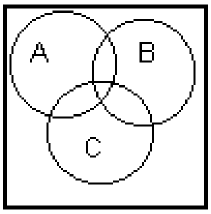
Hipótesis 1. Todos los racistas (A) son violentos (B).

Hipótesis 2. Algún sacristán (C) no es violento.

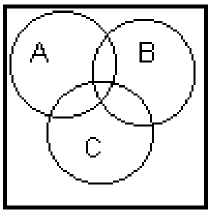
Conclusión. Algún sacristán no es racista.



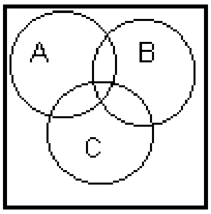
Hipótesis 1.



Hipótesis 2.



Conclusión negada.



Digrama final.

Diagrama	Consistente ☐ Inconsistente ☐
Razonamiento	Valido ☐ Inválido ☐

6.4. Lógica de relatores monarios y diagramas de Venn.

En la parte que sigue de este curso veremos que la lógica proposicional no es suficientemente expresiva, que muchos razonamientos claramente correctos no son captados por ella y que esto se debe a que el análisis realizado es demasiado pobre ya que sólo intervienen los conectores.

En la búsqueda de un lenguaje más expresivo y versátil que el de la lógica proposicional podemos pasar directamente al de la lógica de primer orden o hacer una escala intermedia en el de la lógica de predicados monarios (**LPM**). Puesto que esta lógica está íntimamente relacionada con el álgebra de conjuntos que acabamos de ver, vamos a indicar brevemente en qué consiste la lógica de predicados monarios y cómo podemos utilizar los diagramas de Venn como procedimiento de prueba, también en los casos en que dichos razonamientos se expresen en **LPM**.

Un lenguaje formal consta de un alfabeto básico y de unas reglas precisas de formación de fórmulas.

Nosotros utilizaremos distintos lenguajes de primer orden, dependiendo del uso que queramos darle. El lenguaje de la lógica de predicados monarios sólo tiene esta clase de predicados como signos específicos.

6.4.1. Alfabeto.

El alfabeto de un lenguaje cualquiera, L, de lógica de primer orden de predicados monarios contiene dos tipos de signos: los comunes a todos los lenguajes de primer orden y los que son peculiares de este lenguaje de primer orden. Entre los primeros están los conectores, los cuantificadores y las variables individuales. Entre los segundos están los relatores monarios.

Nosotros usamos $\neg$, $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ como conectores, $\forall$ y $\exists$ como cuantificadores y las letras x, y, z, u, v, w, x_0, x_1, x_2,..., y_0, y_1, y_2, ... como variables individuales. También, como signos impropios utilizaremos paréntesis:), (.

Un lenguaje $L(\mathbf{R})$ concreto contiene además un conjunto $\mathbf{R}$ de relatores monarios.

Usaremos R, S, T, R_0, R_1, R_2,... como relatores monarios.

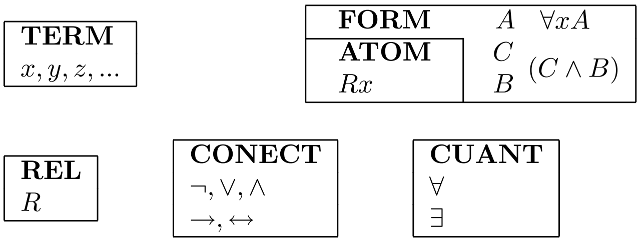
6.4.2. Términos y Fórmulas.

Las fórmulas y los términos de L se construyen siguiendo unas sencillas reglas de formación. Dichas reglas extraen del conjunto de filas de signos del alfabeto a aquellas a las que llamamos términos y fórmulas.

Definición 48 *El conjunto de los términos de L (al que llamamos **TERM**($L(\mathbf{R})$), o simplemente **TERM**) es **el conjunto de sus variables.***

Definición 49 *El conjunto de las fórmulas de L (al que llamamos **FORM**($L(\mathbf{R})$), o simplemente **FORM**, cuando esté claro por el contexto) es **el menor conjunto** que se puede generar a partir de las reglas siguientes:*

- **F1**.- Si τ es un término, $R\tau$ es una fórmula.
- **F2**.- Si A y B son fórmulas, también lo son: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$
- **F3.-** Si A es una fórmula, también lo son: $\forall x A$ y $\exists x A$.



Definición 50 *Llamamos **expresiones de** L al conjunto formado por los términos y las fórmulas de L; es decir,*

$$\mathbf{EXPR} = \mathbf{TERM} \cup \mathbf{FORM}$$

Comentario 51 *Adviértase que tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas, como el menor conjunto que cumple las reglas **F1** a **F3,** si un conjunto Q cumple las mencionadas reglas, entonces **FORM**(L) $\subseteq Q$, lo que significa que todas las fórmulas están en dicho conjunto.*

Definición 52 *Llamamos* ***fórmulas atómicas*** *a las obtenidas mediante la regla* ***F1.***

Definición 53 ***Forma lógica:*** *Las fórmulas obtenidas mediante las reglas* ***F3*** *y* ***F3*** *reciben las denominaciones siguientes:*

Forma lógica	**Denominación**
$\neg A$	negación
$(A \wedge B)$	conjunción
$(A \vee B)$	disyunción
$(A \rightarrow B)$	condicional
$(A \leftrightarrow B)$	bicondicional
$\forall xA$	generalización
$\exists xA$	particularización

6.4.3. Ejemplos de fórmulas bien formadas, indicando su forma lógica.

1. Fórmulas atómicas: $Sx, Ry, ...$
2. Negaciones:
   - *a*) $\neg Sx$
   - *b*) $\neg(\exists x(Gx \wedge Cx) \wedge \exists yRy)$
   - *c*) $\neg\forall xSx$
   - *d*) $\neg\forall x(Rx \rightarrow Sx)$
   - *e*) $\neg\forall x(Fx \wedge \exists yGy)$.
3. Conjunciones:
   - *a*) $\forall xFx \wedge Sx$
   - *b*) $\forall x(\exists zFz \rightarrow Rx) \wedge Sx$
   - *c*) $\forall x(Gx \rightarrow Hx) \wedge \forall x(Hx \rightarrow Fx)$
   - *d*) $\exists x(Gx \wedge \neg Cx) \wedge (\exists xFx \rightarrow \forall xGx)$
4. Disyunciones:
   - *a*) $Fx \vee \forall x\exists y(Cx \rightarrow (Py \wedge Ay))$
   - *b*) $\forall x(Cx \rightarrow \exists y(Py \wedge Ay)) \vee \exists x(Gx \wedge Mx)$
5. Condicionales:
   - *a*) $\forall x(Mx \rightarrow Fx) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Fx)$
   - *b*) $\forall x((Px \vee Rx) \rightarrow Fx) \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow Tx)$

   c) $\forall x((Sx \wedge Lx) \rightarrow Fx) \rightarrow Bx.$

6. Bicondicionales:
   a) $\forall x((Rx \wedge Bx) \rightarrow Cx) \leftrightarrow \neg\exists x(Gx \wedge Cx)$
   b) $\forall x((Rx \wedge Bx) \rightarrow \neg Gx) \leftrightarrow \forall x((Sx \wedge Mx) \wedge \forall y((Gy \wedge My) \rightarrow Dy) \rightarrow Cx)$
7. Generalizaciones:
   a) $\forall x((Gx \wedge Dx) \wedge (Mx \rightarrow \forall y((Gy \wedge My) \rightarrow Dy)))$
   b) $\forall x(\forall y((Sx \wedge Mx) \wedge ((Gy \wedge Dy) \wedge My)) \rightarrow Cx)$
8. Particularizaciones:
   a) $\exists x(Gx \wedge (Px \vee Rx))$
   b) $\exists x(Fx \rightarrow Tx)$
   c) $\exists x((Px \vee Rx) \rightarrow Fx)$
   d) $\exists y\forall x(Gx \rightarrow Ty)$

6.5. Español en Lógica de predicados monarios.

Los enunciados que vamos a formalizar en esta lógica serán todos muy simples, de forma que las fórmulas utilizadas sólo precisen un cuantificador y una sola variable. Como en ocasiones anteriores, la formalización es siempre la parte más resbaladiza pues no hay una forma automática de hacerlo.

6.5.1. Ejemplos y ejercicios

Lo veremos con algunos ejemplos y ejercicios:

EJERCICIO 1.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la formalización adecuada. Como clave de formalización usad la inicial de las palabras.

1. Las raposas no son salmanquesas.
2. Todos los ruidosos están sordos.
3. Algunos saltamontes son radioactivos.
4. Algunos niños respetuosos no saludan.
5. No todos los reptiles son serpientes.
6. No todos los remeros son silenciosos.
7. Algunos no rebuznan, pero silban.

- *a*) $\forall x(Rx \to Sx)$
- *b*) $\neg\exists x(Rx \wedge Sx)$
- *c*) $\neg\forall x(Rx \to Sx)$
- *d*) $\exists x(Rx \wedge Sx)$
- *e*) $\neg\forall x(Rx \wedge Sx)$
- *f*) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1		★				
2	★					
3				★		
4			★			
5			★			
6			★			
7						★

La formalización adecuada a (7) es: $\exists x(\neg Rx \wedge Sx)$

EJERCICIO 2.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada. (Utlizad los relatores R y S las claves de formalización son las iniciales.)

1. Ningún renacuajo es un saltamontes.
2. Todo son refranes o sermones.
3. No todos los que repiten saben.
4. Algunos no son sacristanes o no son racistas.
5. Los roedores no todos son simpáticos.
6. Todos los radicales son solemnes.
7. Ningún rebelde es sifilítico.

- *a*) $\exists x\,(Rx \to Sx)$
- *b*) $\neg\forall x(Rx \to Sx)$
- *c*) $\forall x\,(Rx \to Sx)$
- *d*) $\exists x\neg\,(Rx \wedge Sx)$
- *e*) $\forall x\,(Rx \vee Sx)$
- *f*) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 3.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada. (Utlizad los relatores R y S; las claves de formalización son las iniciales.)

1. No todos los republicanos son socialistas.
2. Algunos rumiantes son silenciosos.
3. Todos estiman a Russell o a Sócrates.
4. Algunos no saben ni ruso ni sueco.
5. Los reptiles están sucios.
6. Todos los ruidosos están sordos.
7. Ningún ruso es sueco.

   a) $\exists x(Rx \to Sx)$
   b) $\neg\forall x(Rx \to Sx)$
   c) $\exists x(Rx \wedge \neg Sx)$
   d) $\exists x\neg(Rx \wedge Sx)$
   e) $\forall x(Rx \vee Sx)$
   f) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 4.- Elegid la formalización adecuada. Como relatores monarios usad los indicados entre paréntesis.

1. El hombre (H) es el único animal (A) que tropieza dos veces en la misma piedra (T)
2. Los tigres (T) y los armadillos (A) huyen del fuego (H).
3. Sólo los tontos (T) y los analfabetos (A) hacen quinielas (H).
4. Los huracanes (H) arrancan los árboles (A) y tumban las casas (T).
5. Ningún tiburón (T)está seguro de su buena preparación (A) a menos que tenga tres filas de dientes (H).
6. Ningún animal (A) sin cuernos (H) puede lanzarlo a uno contra una puerta (T).
    a) $\exists x(Hx \land (Tx \land Ax))$
    b) $\forall x((Tx \lor Ax) \to Hx)$
    c) $\forall x\,((Tx \land Ax) \to Hx)$
    d) $\forall x((Tx \land Ax) \leftrightarrow Hx)$
    e) $\exists x((Tx \land Hx) \to Ax)$
    f) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						

6.6. Semántica.

Para interpretar fórmulas del lenguaje de primer orden debemos explicitar nuestro dominio de cuantificación y precisar cómo interpretamos los relatores del lenguaje. El concepto fundamental que vamos a introducir es el de verdad en una estructura. A partir de él se define el de consecuencia.

6.6.1. Modelos

Usaremos letras mayúsculas de tipo gótico (o similar) para referirnos a modelos.

$\mathfrak{A}$ es una estructura adecuada para $L(\mathbf{R})$ syss $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}^{\mathfrak{A}} \right\rangle$, donde:

1. $\mathbf{A} \neq \emptyset$ es el universo o dominio de la estructura. ($\mathbf{A}$ debe ser un conjunto no vacío.)
2. Para cada relator $R \in \mathbf{R}$ su interpretación, $R^{\mathfrak{A}}$, es un subconjunto del universo; es decir, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbf{A}$

6.6.2. Interpretación de L.

Las fórmulas de $L(\mathbf{R})$ se interpretan en un modelo $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}^{\mathfrak{A}} \right\rangle$ compuesto de un universo y de una serie de relaciones monarias definidas sobre el universo. Dada $\mathfrak{A}$ las sentencias son verdaderas o falsas en $\mathfrak{A}$. La idea es bastante simple: los relatores del lenguaje formal se interpretan como los conjuntos destacados en la estructura. Las fórmulas atómicas se interpretan de modo conjuntista; es decir, la fórmula Rx será verdadera en $\mathfrak{A}$ siempre que $\overline{x} \in R^{\mathfrak{A}}$ (no sabremos si es verdadera o falsa hasta que no sepamos interpretar variables). La cuantificación se interpreta restringida al universo de la estructura; por ejemplo, $\forall x Rx$ será verdadera en un modelo $\mathfrak{A}$ si $R^{\mathfrak{A}}$ es todo el universo del modelo, $\forall x(Rx \to Sx)$ es verdadera en $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbb{A}, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \right\rangle$ siempre que $.R^{\mathfrak{A}} \subseteq S^{\mathfrak{A}}$

Para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las variables; así, cuando sepamos cómo se interpreta la variable x, sabremos si Rx es verdadera o falsa en la estructura $\mathfrak{A}$ con la asignación considerada. Basada en esa asignación se establece el valor de verdad de una fórmula cualquiera.

ASIGNACIÓN

Una asignación es una función F que otorga un elemento del universo a cada variable; es decir,

$$F : VAR \longrightarrow \mathbf{A}$$

ASIGNACIÓN VARIANTE

Dada una asignación cualquiera, F, una variable, x, y un individuo del universo de la estructura, $\mathbf{x}$, definimos $F_x^{\mathbf{x}}$ de la siguiente manera:

$$F_x^{\mathbf{x}} = (F - \{\langle x, F(x) \rangle\}) \cup \{\langle x, \mathbf{x} \rangle\}$$

Esta asignación coincide con la asignación F en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x. En la asignación variante ese valor es $\mathbf{x}$, mientras que en la asignación original podía ser cualquier elemento de $\mathbf{A}$.

INTERPRETACIÓN

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación F definimos una interpretación $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, F \rangle$, extendiendo la función F de forma que otorgue un valor de verdad (0: falso, 1: verdadero) a cada fórmula del lenguaje formal L; es decir,

$$\mathfrak{I} : \mathbf{EXPR}(L) \longrightarrow \mathbf{A} \cup \{0, 1\}$$

tal que

$$\mathfrak{I}[\mathbf{FORM}(L)] = \{1, 0\}$$

Notación 54 *Dada una interpretacion* $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, F \rangle$ *y una asignación variante* $F_x^{\mathbf{x}}$*, escribiremos* $\mathfrak{I}_x^{\mathbf{x}}$ *para designar a la interpretación* $\langle \mathfrak{A}, F_x^{\mathbf{x}} \rangle$.

Definición 55 *Definimos ahora la interpretación de términos y fórmulas.*

- **T1.** Para cada variable individual x, la interpretación viene determinada por la asignación; es decir,

$$\mathfrak{I}(x) = F(x)$$

- **F1**. Para cada fórmula atómica Rx, la interpretación es así:

$$\mathfrak{I}(Rx) = 1 \text{ syss } \mathfrak{I}(x) \in R^{\mathfrak{A}}$$

- **F3.** Los conectores reciben la interpretación habitual:

1. Una fórmula negada es verdadera cuando la fórmula es falsa y falsa cuando es verdadera.
$$\mathfrak{I}(\neg C) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0$$

2. Una conjunción es verdadera cuando ambas fórmulas lo son
$$\mathfrak{I}(C \wedge D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad y \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

3. Una disyunción es verdadera si al menos una de las fórmulas lo es
$$\mathfrak{I}(C \vee D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

4. Un condicional sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, es verdadero en todos los demás casos
$$\mathfrak{I}(C \rightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

5. Un bicondicional es verdadero cuando las dos fórmulas son simultáneamente verdaderas o falsas
$$\mathfrak{I}(C \leftrightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = \mathfrak{I}(D)$$

- **F4.** Las fórmulas cuantificadas reciben la siguiente interpretación:

1. Una generalización es verdadera cuando lo es para cada elemento del universo
$$\mathfrak{I}(\forall xC) = 1 \text{ syss para cada } \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \mathfrak{I}^{\mathbf{a}}_{x}(C) = 1$$

2. Una particularización es verdadera cuando lo es para algún miembro del universo
$$\mathfrak{I}(\exists xC) = 1 \text{ syss existe un } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ tal que:} \mathfrak{I}^{\mathbf{a}}_{x}(C) = 1$$

6.6.3. Ejemplos

Lo veremos con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.- La fórmula $\forall x(Rx \vee Sx)$ es verdadera en el modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}.R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{1,2\}$ y $S^{\mathfrak{A}} = \{2,3\}$. En realidad lo será en todo modelo en donde $\mathbb{A} = R^{\mathfrak{A}} \cup S^{\mathfrak{A}}$

EJEMPLO 2.- La fórmula $\forall x(Rx \to \neg Sx)$ es verdadera en el modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}.R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{1,2\}$ y $S^{\mathfrak{A}} = \{3\}$. En realidad lo será en todo modelo en donde $R^{\mathfrak{A}} \cap S^{\mathfrak{A}} = \emptyset$

EJEMPLO 3.- La fórmula $\forall x(\neg Sx \to \neg Rx)$ es verdadera en el modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}.R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{1,2\}$ y $S^{\mathfrak{A}} = \{1\}$. En realidad lo será en todo modelo en donde $R^{\mathfrak{A}} \subseteq S^{\mathfrak{A}}$

EJEMPLO 4.- La fórmula $\exists x(Rx \wedge \neg Sx)$ es verdadera en el modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}.R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{1,2\}$ y $S^{\mathfrak{A}} = \{3\}$. En realidad lo será en todo modelo en donde $R^{\mathfrak{A}} \cap \sim S^{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$

6.7. Conceptos clave.

Aquí definimos los conceptos de *satisfacibilidad* de una fórmula y de un conjunto de fórmulas, e introducimos la relación de *consecuencia* y su negación (la de *independencia*). El concepto de *validez* se reducirá al de consecuencia (del conjunto vacío de fórmulas). También, como cuestión terminológica, diremos que una interpretación $\mathfrak{I}$ es un *modelo* de una fórmula (o de un conjunto de fórmulas) en el caso en que la interpretación satisfaga a la fórmula (o a cada una de las fórmulas del conjunto).

SATISFACIBILIDAD E INSATISFACIBILIDAD

Definición 56 *Una fórmula C es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(C) = 1$. (también diremos que $\mathfrak{I}$ satisface a la fórmula C o también, que $\mathfrak{I}$ **es modelo** de la fórmula C. Es corriente escribir $\mathfrak{I} \models C$ para indicar que $\mathfrak{I}$ es modelo de C.)*

Definición 57 *Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** syss hay una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$. (Decimos que $\mathfrak{I}$ satisface al conjunto Γ ; o también, que $\mathfrak{I}$ **es modelo de** Γ. Es corriente escribir $\mathfrak{I} \models \Gamma$ para indicar que $\mathfrak{I}$ es modelo de Γ.)*

Comentario 58 *Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n$ es satisfacible.*

Comentario 59 *El concepto intuitivo correspondiente es, como habreis adivinado, el de coherencia, o compatibilidad de creencias.*

Comentario 60 *Definimos **insatisfacible** como no satisfacible.*

VALIDEZ, CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA.

Definición 61 *Una fórmula C es* ***consecuencia*** *de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \models C$ - syss todo modelo de Γ lo es también de C; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ, hace verdadera a C.*

Definición 62 *Una fórmula C es* ***válida*** *-y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C.*

Definición 63 *Una fórmula C es* ***independiente*** *de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C.*

6.8. Diagramas, fórmulas y conjuntos.

Los ejemplos anteriores nos sugieren que podemos asociar a las fórmulas las expresiones conjuntistas que aparecen al final de cada uno de los ejemplos. Puesto que también sabemos representar en diagramas de Venn dichas expresiones conjuntistas, lo que vamos a hacer ahora es tratar de articularlo todo. La ventaja es que podremos utilizar los diagramas como procedimiento de prueba en **LPM.**

6.8.1. Ejemplos

Lo veremos con algunos ejemplos.

Instrucciones. Los siguientes ejercicios lo son de formalización de enunciados del español en el lenguaje de la lógica de primer orden y de su interpretación en teoría de conjuntos. (El lenguaje de primer orden empleado sólo contiene relatores monarios, pudiéndose expresar fácilmente su significado en el lenguaje de teoría de conjuntos; incluso representarse mediante diagramas de Venn.)

EJERCICIO 1.-

(1) *Elegid la formalización adecuada.*

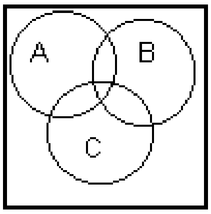
1	Sólo las algas y los batracios crecen en aquel lugar.	a	$\forall x((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx)$
2	Todos están alicaídos o bizquean notoriamente.	b	$\exists x(Ax \wedge Cx)$
3	Los asesinos no estaban borrachos.	c	$\forall x(Cx \rightarrow (Ax \vee Bx))$
4	Algunos borrachos toman café.	d	$\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$
5	Los alicantinos y los barceloneses son unos cabezotas.	e	$\forall x(Ax \rightarrow Cx)$
6	Los asesinos toman café.	f	$\exists x(Bx \wedge Cx)$
7	Algunos asesinos toman café.	g	$\forall x(Bx \vee Ax)$

(2) *Expresad lo anterior en teoria de conjuntos.*

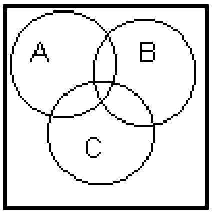
a $\forall x(Ax \vee Bx \rightarrow Cx)$
b $\exists x(Ax \wedge Cx)$
c $\forall x(Cx \rightarrow Ax \vee Bx)$
d $\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$
e $\forall x(Ax \rightarrow Cx)$
f $\exists x(Bx \wedge Cx)$
g $\exists x(Bx \vee Ax)$

i $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$
ii $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$
iii $\mathfrak{A} \subseteq\sim \mathfrak{B}$
iv $\sim(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = \emptyset$
v $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$
vi $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$
vii $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$

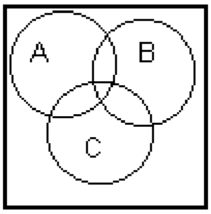
(3) *Representad lo anterior mediante diagramas de Venn. (Figura 1.)*



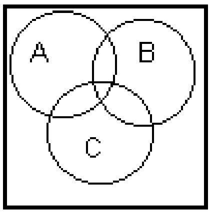
i



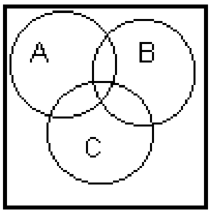
ii



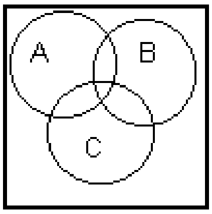
iii



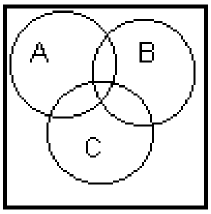
iv



v



vi



vii

EJERCICIO 2.-

(1) *Elegid la formalización adecuada.*

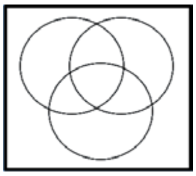
1 Los **conejillos de indias** (C) **son desesperadamente ignorantes en cuestiones musicales** (D). .
2 Un **pez** (P) que no sea **capaz de bailar un minuto**(B) es **despreciable** (D).
3 Ningún pez despreciable puede bailar un minuto.
4 Algunos **ánades** (D) no son **ranas** **(B)**.
5 Algunos **ánades** (D) están desprovistos de **poesía** **(C)** .
6 Ningún **oficial** (D) declina nunca una invitación a bailar el vals.
7 Ninguna **rana** (B) es **poética** (C)

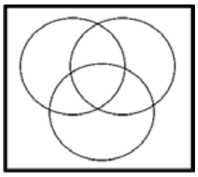
a $\forall x(Px \wedge \neg Bx \rightarrow Dx)$
b $\forall x(Cx \rightarrow Dx)$
c $\forall x(Px \wedge Dx \rightarrow \neg Bx)$
d $\neg\exists x(Bx \wedge Cx)$
e $\exists x(Dx \wedge \neg Cx)$
f $\neg\exists x(Dx \wedge \neg Bx)$
g $\exists x(Dx \wedge \neg Bx)$

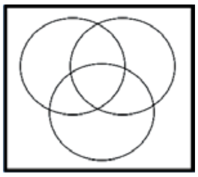
(2) *Expresad lo anterior en teoría de conjuntos.*

a	$\forall x(Px \wedge Bx \rightarrow Dx)$	i	$\mathfrak{D} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$
b	$\forall x(Cx \rightarrow Dx)$	ii	$\mathfrak{D} \cap \sim \mathfrak{B} \neq \emptyset$
c	$\forall x(Px \wedge Dx \rightarrow \neg Bx)$	iii	$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$
d	$\neg\exists x(Bx \wedge Cx)$	iv	$\sim \mathfrak{B} \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{D}$
e	$\exists x(Dx \wedge \neg Cx)$	v	$\mathfrak{P} \cap \mathfrak{D} \subseteq \sim \mathfrak{B}$
f	$\neg\exists x(Dx \wedge Bx)$	vi	$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \emptyset$
g	$\exists x(Dx \wedge \neg Bx)$	vii	$\mathfrak{D} \cap \sim \mathfrak{C} \neq \emptyset$

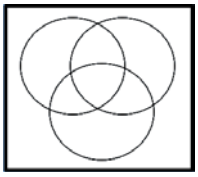
(3) *Representad lo anterior mediante diagramas de Venn.*

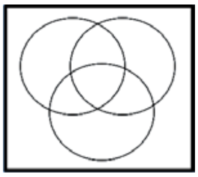


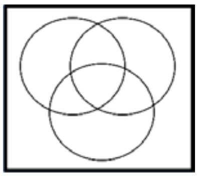




i ii iii iv







v vi vii

6.9. Argumentos que se resuelven con diagramas.

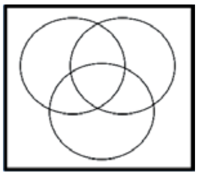
Esta parte es eminentemente práctica, y puesto que las indicaciones de cómo utilizar los diagramas como procedimiento de prueba ya las vimos en la sección correspondiente, lo único que haremos es resolver éstos y otros ejercicios similares durante el curso. La única novedad es que ahora se pide que se formalicen en lógica de predicados monarios los enunciados. Mediante diagramas determinar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible consiste en verificar si su diagrama correspondiente es consistente o inconsistente. Por consiguiente, el verificar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas o independiente de ellas consiste en realizar el diagrama de las hipótesis junto con el de la negación de la conclusión y verificar su consistencia (Si es inconsistente el diagrama, será consecuencia; si es consistente, será independiente. El diagrama nos ayudará a encontrar el modelo que satisfaga las hipótesis pero no la conclusión, en el segundo caso.)

EJERCICIO 1.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

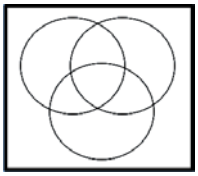
HIPÓTESIS 1.- Algunos judíos son ricos

HIPÓTESIS 2.- Todos los esquimales son gentiles

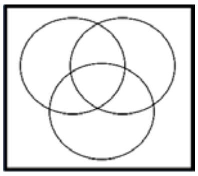
CONCLUSIÓN Algunas personas ricas no son esquimales



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

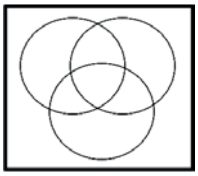


Diagrama final.

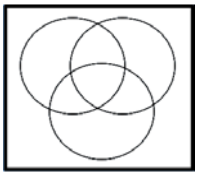
Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

EJERCICIO 2. Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

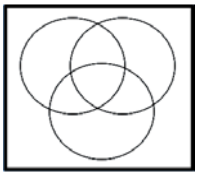
HIPÓTESIS 1.- Todas las avispas son hoscas

HIPÓTESIS 2.- Todos criaturas hoscas son bien acogidas

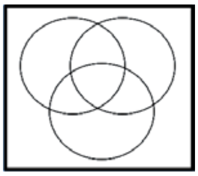
CONCLUSIÓN Todas las avispas son mal acogidas



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

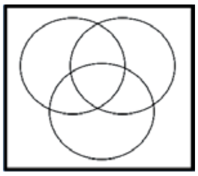


Diagrama final.

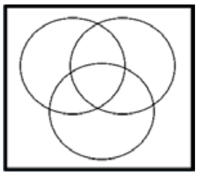
Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

EJERCICIO 3.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

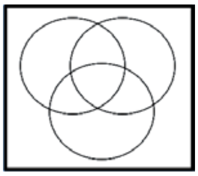
HIPÓTESIS 1.- Todos los canarios bien nutridos cantan con potencia

HIPÓTESIS 2.- Ningún canario se siente melancólico si canta con potencia

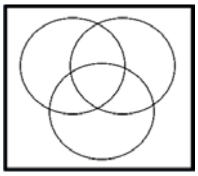
CONCLUSIÓN Todos los canarios bien nutridos son joviales



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

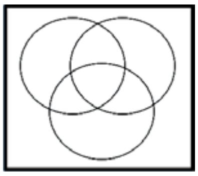
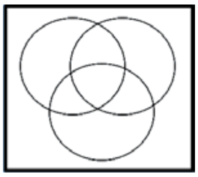


Diagrama final.

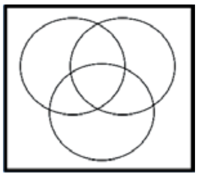
Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

EJERCICIO 4.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

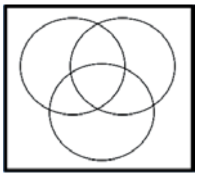
HIPÓTESIS 1.- Todos los leones son fieros
HIPÓTESIS 2.- Algunos leones no beben café
CONCLUSIÓN Algunas criaturas que beben café no son fieras



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

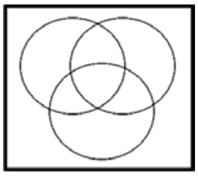
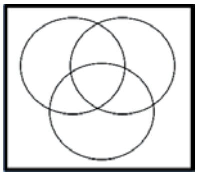


Diagrama final.

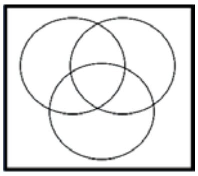
Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

EJERCICIO 5.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

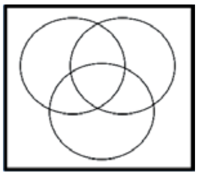
HIPÓTESIS 1.- Algunas almohadas son blandas
HIPÓTESIS 2.- Ningún atizador es blando
CONCLUSIÓN Algunos atizadores no son almohadas



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

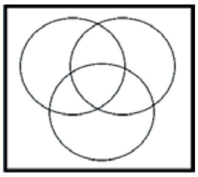


Diagrama final.

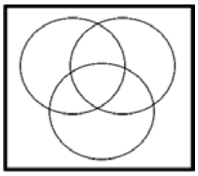
Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

EJERCICIO 6.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

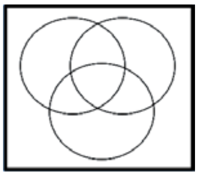
HIPÓTESIS 1.- A todos los abstemios les gusta el azúcar

HIPÓTESIS 2.- Ningún ruiseñor bebe vino

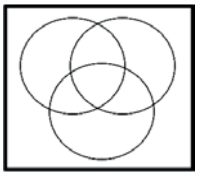
CONCLUSIÓN A ningún ruiseñor le disgusta el azúcar



Hipótesis 1



Hipótesis 2



Conclusión negada

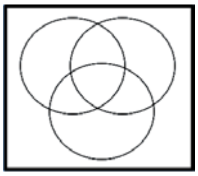


Diagrama final.

Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

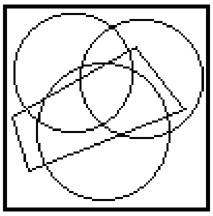
EJERCICIO 7.- Formalizad es primer orden y resolved usando diagramas

HIPÓTESIS 1.- Los niños son ilógicos

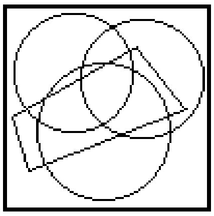
HIPÓTESIS 2.- Nadie que sepa manejar un cocodrilo es despreciado

HIPÓTESIS 3.- Las personas ilógicas son despreciables

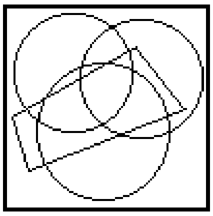
CONCLUSIÓN Algunos niños so saben manejar cocodrilos



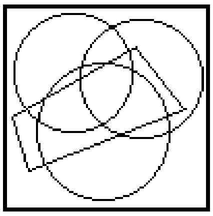
Hipótesis 1



Hipótesis 2



Hipótesis 3



Conclusión negada

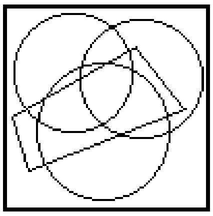


Diagrama final.

Diagrama	Consistente Inconsistente
Razonamiento	Correcto Incorrecto

6.10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Tanto filósofos como informáticos, lógicos y psicólogos, han constatado que en muchas ocasiones nos es más fácil resolver un problema de matemáticas, física, lógica o informática usando diagramas que usando las clásicas representaciones algebraicas. De hecho, los profesores de Lógica ya eran conscientes de lo útiles que son, por ejemplo, los diagramas de Venn a la hora de resolver ciertos problemas y de mostrar ciertos teoremas en teoría de conjuntos. Ya Euler, Venn y Peirce se dieron cuenta de la importancia que tienen los diagramas en las pruebas matemáticas.

Este es un campo de investigación reciente y muy rico, pero la bibliografía no es elemental. La referncia mejor es:

Allwein, Gerard and Jon Barwise [1996]. **Logical Reasoning with Diagrams**. G. Allwein and J. Barwise, editors, New York: Oxford University Press.

Para los diagramas que se estudian aquí se puede consultar el libro de Suppes anteriormente mencionado.

Capítulo 7

Relaciones y Funciones.

Esta parte sólo es necesaria para entender la semántica de la lógica de primer orden que se introducirá en apartados posteriores, hemos creído conveniente situarla aquí porque después de haber estudiado los conjuntos parece natural seguir con una clase especial de ellos; las relaciones y funciones. Pero si no se va a estudiar la lógica de primer orden y su semántica, esta parte es prescindible.

7.1. Par ordenado y producto cartesiano.

En la notación de conjuntos listando sus elementos entre llaves el orden en que estos aparece no importa, ya que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. si queremos especificar un orden determinado entre los elemntos de un conjunto no podemos usar las llaves $\{\}$, que se sustituyen por paréntesis $\langle\rangle$ y en lugar de conjuntos se habla de *pares ordenados* (cuando son dos elementos) o de *secuencias* cuando son más de dos elementos.

- *Par ordenado.* $\langle x, y\rangle$ es el conjunto formado por x e y en este orden.

Existe una definición en términos de pares desordenados $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ aunque lo normal es tomarlo como una noción primitiva.

- Una *n-pla* es una secuencia ordenada de n elementos $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$

Producto cartesiano.

Dados dos conjunto cualesquiera A y B se puede considerar el conjunto formado por todos los pares ordenados formados por un elemento de A en la primera componente y un elemento de B en la segunda componente. Este conjunto se llama su *producto cartesiano.*

- *Producto cartesiano de dos conjuntos.* $A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \text{ y } y \in B\}$

Ejemplo:
Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{s, t, u, v\}$ entonces $A \times B =$
$= \{\langle a, s\rangle, \langle a, t\rangle, \langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle, \langle b, s\rangle, \langle b, t\rangle, \langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, s\rangle, \langle c, t\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\}$
Obsérvese que $|A \times B| = 3 \cdot 4 = 12$
Si $|A| = n$ y $|B| = m$ entonces $|A \times B| = n \cdot m$

7.2. Relaciones

7.2.1. Relaciones binarias.

- Una *relación binaria* es un conjunto de pares ordenados. El producto cartesiano de dos conjuntos es un ejemplo de relación binaria La llamaremos simplemente *relación.*
- *Dominio de la relación. Dom* $R = \{x : \text{Existe un } y \text{ tal que } \langle x, y\rangle \in R\}$
- *Rango de la relación. Rang* $R = \{x : \text{Existe un } y \text{ tal que } \langle y, x\rangle \in R\}$
- *Campo de la relación. Camp* $R =$ *Rang* $R \cup$ *Dom* R

La notación más usual es xRy en lugar de $\langle x, y\rangle \in R$. Sobre todo con algunas relaciones significativas como son $=, \subset$ y $\leq$.

Ejemplo:

Como ejemplo del uso de la formalización del lenguaje natural en teoría de conjuntos la expresión "Isabel es madre de María" puede verse como $\langle Isabel, María\rangle \in \{\langle x, y\rangle : "x \quad es\ madre\ de \quad y"\}$ (relación).

Así tomando la relación $R =$ "*es madre de*" , *Dom* R es el conjunto de todas las madres y *Rang* R es el conjunto de las hijas o hijos.

7.2.2. Relación inversa y restricción

Es la relación que se obtiene de otra permutando las componentes de todos sus pares ordenados

- *Relación inversa.* $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$

Dom $R^{-1} =$ *Rang* R y *Rang* $R^{-1} =$ *Dom* R

- *Restricción de una relación a un conjunto:* $R \mid A = \{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in R \text{ y } \ x \in A\}$.

7.2.3. Propiedades de ciertas relaciones.

- R es *reflexiva* si $\langle x, x\rangle \in R$ para todo $x \in$ *Camp* R
- R es *simétrica* si $\langle x, y\rangle \in R$ implica $\langle y, x\rangle \in R$
- R es *transitiva*si $\langle x, y\rangle \in R$ y $\langle y, z\rangle \in R$ implica $\langle x, z\rangle \in R$
- R es *irreflexiva* si $\langle x, x\rangle \notin R$ para todo $x \in$ *Camp* R

- R es *asimétrica* si $\langle x, y\rangle \in R$ implica $\langle y, x\rangle \notin R$
- R es *intransitiva* si $\langle x, y\rangle \in R$ y $\langle y, z\rangle \in R$ implica $\langle x, z\rangle \notin R$
- R es *antisimetrica* si $\langle x, y\rangle \in R$ y $\langle y, x\rangle \in R$ implica $x = y$

7.2.4. Relaciones de equivalencia.

- R es una *relación de equivalencia* si y sólo si R es una relación y R es reflexiva, simétrica y transitiva
- R es una *relación de equivalencia sobre* A si y sólo si *Camp* $R = A$ y R es una relación de equivalencia
- *Clase de equivalencia de xsegún* R (siendo $x \in$ *Camp* R) : $[x]_R = \{y : \langle y, x\rangle \in R\}$
- *Cociente.* Si R es una equivalencia sobre A , el *cociente* de A por R es el conjunto de las clases de equivalencia $A_{/R} = \{[x]_R : x \in A\}$
- *Particiones.* H es una partición de A si y sólo si se cumple H es un conjunto de subconjuntos no vacíos de A, disjuntos dos a dos y tal que la unión de todos ellos es A. Es decir, si se cumple:

  (1) si $X \in H$ entonces $X \subseteq A$ y $X \neq \emptyset$
  (2) si $X, Y \in H$ con $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \emptyset$
  (3) $x \in A$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in H$

El resultado más importante sobre relaciones de equivalencia es que el conjunto $A_{/R} = \{[x]_R : x \in A\}$ de las clases de equivalencia de R sobre A forma una partición de A.

Ejemplo:

Consideremos la relación R sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ definida por :

xRy si $x - y$ es divisible por 5.

Se demuestra que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$, y es fácil observar que sólo hay cinco clases de equivalencia:

$[0] = \{0, 5, -5, 10, -10, 15, -15, \cdots\}$
$[1] = \{1, 6, -4, 11, -9, 16, -14, \cdots\}$
$[2] = \{2, 7, -3, 12, -8, 17, -13, \cdots\}$
$[3] = \{3, 8, -2, 13, -7, 18, -12, \cdots\}$
$[4] = \{4, 9, -1, 14, -6, 19, -11, \cdots\}$

Estos cinco subconjuntos de $\mathbb{Z}$ forman una partición de $\mathbb{Z}$

7.2.5. Relaciones de Orden

- R es una *relación de orden (parcial)* si y sólo si R es una relación y R es reflexiva, antisimétrica y transitiva
- R es un *orden (parcial)* sobre A si y sólo si $Camp\ R = A$ y R es una relación de orden
- R es un *orden total (o lineal)* si y sólo si R es una relación de orden y se verifica xRy o yRx para todo x, y (R es *conectada)*
- R es un *orden total* sobre A si y sólo si $CampR = A$ y R es una relación de orden lineal
- Un conjunto parcialmente ordenado es un par $\langle A, R\rangle$ formado por un conjunto A y un orden parcial sobre A
- Un *conjunto totalmente ordenado* es un par $\langle A, R\rangle$ formado por un conjunto A y un orden total sobre A
- Sea $\langle A, R\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq A$
  Un elemento $a \in Y$ es un *elemento minimal* de Y si y sólo si no existe $x \in Y$ tal que $\langle x, a\rangle \in R$.
  Un elemento $a \in Y$ es *primer elemento* de Y (*mínimo* de Y) si y sólo si $\langle a, x\rangle \in R$ para todo $x \in Y$.

Notación: Habitualmente escribiremos $\leqslant$ en vez de R para relaciones de orden, y $\langle A, \leqslant\rangle$ para conjuntos ordenados tanto parcial como totalmente.

7.3. Funciones

- *Función:* f es una función si y sólo si f es una relación y se cumple:

si $\langle x, y\rangle \in f$ y $\langle x, z\rangle \in f$ entonces $y = z$
Notación: Si f es una función notaremos $f(x) = y$ para indicar $\langle x, y\rangle \in f$

- Composición: $f \circ g$ es la función definida por:

$$\langle x, y\rangle \in f \circ g \text{ syss existe algún } z \text{ tal que } \langle x, z\rangle \in g \text{ y } \langle z, y\rangle \in f$$

En tal caso se tiene que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = y$

Funciones de A en B

- f es una función de A en B si y sólo si f es una función y $Domf = A$ y $Rangf \subseteq B$

Notacion: para indicar que f es una función de A en B escribiremos $f : A \longrightarrow B$

- f es una funcion inyectiva si y sólo si f es una función y se cumple que:

si $\langle x,y\rangle \in f$ y $\langle z,y\rangle \in f$ entonces $x = z$

- $f : A \longrightarrow B$ es exhaustiva si y sólo si $Rangf = A$
- $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva syss f es inyectiva y exhaustiva

7.4. Ejercicios

1. Sea $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}, \{\{b\}\}, \{\{\{b\}\}\}\}$. Especifica las siguientes relaciones:
   (a) R=$\{\langle x,y\rangle$:$x, y \in A$ y $x \subseteq y\}$
   (b) S=$\{\langle x,y\rangle$:$x, y \in A$ y $x \subseteq y\}$
   (c) T=$\{\langle x,y\rangle : x, y \in A$ y $x = \mathfrak{P}y\}$

2. Cual de las siguientes propiedades es cierta. Demuéstralo o da un contraejemplo cuando sea falso.
   (a) $(A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C))$
   (b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D))$
   (c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C))$
   (d) $A \times B = \mathfrak{P}\mathfrak{P}(A \cup B)$

3. Prueba que si ”par ordenado” se define $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, entonces se cumple la propiedad fundamental: $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$ implica $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

4. Especifica cuales de las siguientes relaciones xRy son reflexivas, cuales simétricas y cuales transitivas:
   (a) x e y son personas del mismo sexo
   (b) x es hija/o de y
   (c) x e y son hermanos/as.
   (d) x e y comparten al menos uno de los cuatro abuelos/as.
   (e) x e y hablan un mismo idioma.
   (f) x es un factor de y (x e y números enteros).
   (g) x es una fracción de números enteros equivalente al número decimal y.

5. Determina cuales de las relaciones del ejercicio 7 son de equivalencia. Escribe el conjunto de las clases de equivalencia para cada una de ellas.

6. Demuestra las siguientes propiedades:
   (a) la relación R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$.
   (b) la relación R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.
   (c) la relación R es de equivalencia en A si y sólo si $R \circ R^{-1} = R$ y $DomR = A$.

7. Determina si las siguientes relaciones son órdenes parciales u órdenes totales.

(a) La relación xRy definida por $x < y$ ($<$ el orden usual en los números naturales).

(b) La relación xRy definida por *x divide a y* ($x \neq y$) en el conjunto de los números naturales.

8. Considérese la relación siguiente definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:

$(a,b) \leqslant (c,d)$ si y sólo si $a \leqslant c$ y $b \leqslant d$.

Demuestra que es un orden parcial pero no es total.

7.5. Más ejercicios de relaciones.

EJERCICIO 1. Decid si es cierto para todas las relaciones R y S. Marcad (a) en caso afirmativo y (b) en caso negativo.

1. Si $DomR = DomS$ entonces $R = S$.
2. Si R es reflexiva entonces $\{\langle x,x\rangle \,/ x \in CampR\}$ es un subconjunto de R.
3. Si R y S son transitivas, entonces, $R \cup S$ es transitiva.
4. Si R es una relación simétrica, entonces $R^{-1} = R$
5. Si R es una relación asimétrica, entonces R es antisimétrica.

	a	b
1		
2		
3		
4		
5		

EJERCICIO 2. Marcad (a) en caso afirmativo y (b) en caso negativo.

1. Nos indican que $\{E\}$ es una partición de E. ¿Podrías asegurar que E no es vacío?.
2. Representamos mediante $2N$ al conjunto de los múltiplos de 2 y mediante $3N$ a los de tres. ¿Es $\{2N, 3N\}$ una partición de N?
3. Sea $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ una partición de un conjunto X.
   ¿Es $\{A, B \cup C, D \cap E, F, G, H\}$ una partición de X.?
4. Sea R una relación de orden. ¿Podría R ser también una relación de equivalencia?.
5. ¿Es $N \times N$ una relación de orden sobre N?

	a	b
1		
2		
3		
4		
5		

EJERCICIO 3. Sea $R = \{\langle\emptyset, \{\emptyset\}\rangle, \{\emptyset, \emptyset\}, \langle\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\rangle\}$ $A = \emptyset$ $B = \{\emptyset\}$ $C = \{\{\emptyset\}\}$

Hallad:

1. $R \mid A$
2. $R \mid B$
3. $R \mid C$
4. $R-^1$
5. $R-^1 \mid C$
6. $(R -^1 \cup R) \mid (B \cup C)$

EJERCICIO 4. Sea $R = \{\langle 1, \{2\}\rangle, \{1, 1\}, \langle\{1\}, \{2\}\rangle\}$ $A = \emptyset$

$B = \{1\}$ $C = \{\{2\}\}$
Hallad:

1. $R \mid A$
2. $R \mid B$
3. $R \mid C$
4. $R-^1$
5. $R-^1 \mid C$
6. $(R -^1 \cup R) \mid (B \cup C)$

EJERCICIO 5. En cada uno de los siguientes ejemplos decid qué propiedades tiene la relación R

1. $R \equiv \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$
2. $R \equiv \{\langle x, y\rangle /x$ es múltiplo de $y\}$
3. $R \equiv \{\langle x, y\rangle \in N^2/3 = x \;\&\; 2y = 5\}$

4. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in N^2/9 \leqslant x \leqslant y \leqslant 10\}$

	Asim	Reflex	Antisim	Trans	Conect	Ning
1						
2						
3						
4						

(a) Asimétrica, (b) Reflexiva, (c) Antisimétrica, (d) Transitiva, (d) Conectada y (f) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 6. En cada uno de los siguientes ejemplos decid qué propiedades tiene la relación R

1. $R \equiv \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$
2. $R \equiv \left\{\langle x,y\rangle \in N^2/y = x - 4\right\}$
3. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in H^2/x \quad \text{es yerno de} \quad y\}$
4. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in H^2/x \quad \text{conoce a} \quad y\}$
5. $R \equiv \{\langle x,y\rangle /x \leqslant y\}$
6. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in R^2/x^2 = y^2\}$
7. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in N^2/x \leqslant 10^6 \leqslant y\}$

	Serial	Antisim	Euclídea	Intrans	Irreflex	Ninguna
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

(a) Serial, (b) Antisimétrica, (c) Euclídea, (d) Intransitiva, (e) Irreflexiva, (f) Ninguna de las anteriores

EJERCICIO 7. En cada uno de los siguientes ejemplos decid qué propiedades tiene la relación R

1. $R \equiv \{\langle c,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle\}$
2. $R \equiv \left\{\langle x,y\rangle \in N^2/x \pm y = 10\right\}$
3. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in H^2/x \text{ es hermano mellizo de } y\}$
4. $R \equiv \{\langle x,y\rangle \in H^2/x \text{ conoce a } y\}$

5. $R \equiv \{\langle x, y\rangle /x = \pm 2 \ \& \ \ y = 5\}$
6. $R \equiv \{\langle x, y\rangle \in R^2/x^2 = y^2\}$
7. $R \equiv \{\langle x, y\rangle \in N^2/x \leqslant y \leqslant 77\}$

	Sim	Antisim	Conec	Intrans	Irreflex	Ninguna
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

7.6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Libros de Tería de Conjuntos hay muchos, aunque a este nivel tan elemental no conozco ninguno. Tal vez lo más elemental que conozco sean los tres capítulos del libro de lógica de Suppes

- Suppes [1972] Lógica simbólica. CECSA. México.

Mis favoritos son

- Enderton [1977] Elements of Set Theory. Academic Press. New York
- Devlin [1997] The Joy of Sets. Springer Verlag. New York

Muchos de los ejercicios son del libro de Carroll

- Carrol [1972] El juego de la lógica. Alianza Editorial. Madrid

Parte III

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Capítulo 8

INTRODUCCIÓN GENERAL

8.1. ¿Por qué necesitamos la Lógica de Primer Orden?

El objetivo fundamental de este tema es el de introducir, de manera intuitiva, los conceptos fundamentales de la lógica clásica de primer orden[1]. Desde una perspectiva muy general, nos interesa destacar lo siguiente: (1) la caracterización de la lógica como el estudio de la consecuencia (o de los conjuntos consistentes de enunciados) y (2) el objetivo de encontrar sistemas formales que mecanicen el procedimiento de determinar si a partir de ciertas hipótesis se siguen ciertas conclusiones. En esto, ¡naturalmente!, coincide la lógica proposicional con la de primer orden. Los detalles cambian, pues el lenguaje de la lógica de primer orden, FOL (abreviatura del inglés First Order Logic), es considerablemente más complejo.

De manera que se mantiene:

- *Lógica* = estudio de la *consecuencia* (razonamientos válidos o correctos)
- *Lógica* = estudio de los conjuntos de creencias *consistentes*
- *Lógica = Gramática + Semántica (+ Cálculo)*

A la pregunta que sirve de encabezamiento a este apartado respondemos que aunque la lógica proposicional es formalmente muy satisfactoria, su capacidad expresiva es bastante limitada.

---

[1] La lógica clásica se caracteriza por su rigor y precisión, pero carece de matices; la verdad es absoluta, el tiempo está ausente, no hay ambigüedad. La lógica clásica caracteriza el razonamiento de las matemáticas y cuando se aplica a razonamientos no matemáticos, se matematizan primero. Hay otras lógicas: Temporal, modal, dinámica, borrosa, no monotónica, etc.

Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 64 *El razonamiento siguiente es claramente correcto; sin embargo, la lógica proposicional no nos permite demostrarlo ya que en esta lógica los tres enunciados quedan sin analizar; es decir, se consideran fórmulas atómicas*

$\alpha \equiv$ Sólo los viejos y los niños dicen la verdad.
$\beta \equiv$ María Manzano no es una vieja ni es una niña.
LUEGO:
$\gamma \equiv$ María Manzano miente.

En lógica proposicional α, β y γ se formalizan como letras proposicionales (por ejemplo, p, q y r) y por lo tanto $\{p, q\} \nvDash r$.

Para poder entrar en el detalle de este razonamiento y establecer su corrección necesitamos un lenguaje que contenga no sólo los conectores (entre ellos, la negación, $\neg$, el conyuntor, $\wedge$, el condicional, $\rightarrow$, y el disyuntor $\vee$), sino también:

- Constantes individuales, por ejemplo, a. En nuestro ejemplo, María Manzano se formalizaría como una constante individual.
- Relatores; por ejemplo, V, N y M. En nuestro ejemplo, ser viejo, niño o mentiroso se formalizarían como relatores monarios.
- Cuantificadores; por ejemplo, $\forall$. Nos sirve para expresar "todos los".
- Variables individuales, para dar curso a la cuantificación.

Con este lenguaje se podría formalizar:

$\alpha \equiv \forall x(\neg Mx \rightarrow (Vx \vee Nx))$
$\beta \equiv \neg Va \wedge \neg Na$
LUEGO:
$\gamma \equiv Ma$

En la lógica de primer orden introduciremos un lenguaje formal, desarrollaremos una semántica para sus fórmulas e introduciremos un cálculo deductivo que nos permitirá demostrar γ a partir de $\{\alpha, \beta\}$.

Comentario 65 *El lenguaje requerido para formalizar el razonamineto anterior sólo utiliza relatores monarios. La lógica que sólo utiliza relatores monarios es más expresiva que la proposicional, pero retiene de ésta algunas de sus metapropiedades, tales como la decidibilidad, que se pierden al pasar al lenguaje de primer orden sin restricciones. En la parte anterior de este curso, la del razonamineto lógico con diagramas, hemos estudiado esa lógica.*

Comentario 66 *Es cierto que la lógica de primer orden contiene a la proposicional. Esto quiere decir que si un razonamiento es proposicionalmente correcto, lo seguirá siendo en primer orden, pero si es incorrecto proposicionalmente no tiene porqué seguir siendo incorrecto en primer orden. (Lo acabamos de ver en el ejemplo, es correcto en primer orden e incorrecto en proposicional.)*

8.2. Lenguajes de orden cero, de primero y de segundo orden.

Como se ha dicho anteriormente, la lógica que estamos estudiando es la denominada lógica clásica.

Habiendo caracterizado a la lógica como el estudio de los razonamientos válidos o correctos y llegado a la conclusión de que la exigencia de rigor y precisión nos obliga a introducir un lenguaje formal, necesitamos saber cuál. Todo dependerá del nivel de abstracción que se vaya a usar; cuando los enunciados simples no se analizan y en el razonamiento tan sólo intervienen los conectores, el lenguaje a usar es el proposicional (o de orden cero); cuando se analizan los enunciados atómicos y se cuantifica sobre individuos, el lenguaje ha de ser el de primer orden; cuando la cuantificación se extiende a propiedades y relaciones, precisamos el lenguaje de segundo orden [2].

Habitualmente estamos interesados en una cierta "realidad matemática" a la que hemos otorgado una estructuración básica: tenemos un universo o dominio de discurso, en el que están los objetos de los que queremos hablar, y ciertas relaciones y funciones definidas sobre el universo de discurso.

Ejemplo 67 *Imaginad que lo que nos interesa es el estudio de las relaciones de orden. Por muy limitada que haya sido nuestra experiencia matemática, seguro que no nos resultan desconocidas ciertas estructuras de orden.*

- Ya en la escuela primaria aprendimos el orden de los naturales, de los enteros y de otros números. También nos familiarizamos con el concepto de "ser un subconjunto de" y vimos que establecía un cierto orden, que en ciertos dominios podía incluso ser lo que llamamos "una cadena".

- Por otra parte, tal vez en Filosofía de la Ciencia os planteasteis cómo se establece un concepto métrico o una escala (por ejemplo, la masa, la dureza de los metales, la intensidad de un seísmo) y llegasteis a la conclusión de que fue preciso un proceso de comparación entre sucesos o cualidades y el establecimiento de una relación de orden.

- Posiblemente algunos de vosotros habeis estudiado los retículos y tal vez los cardinales y los ordinales.

- Más adelante quizá estudies teoría de conjuntos axiomática, pero casi seguro que en alguna ocasión emplareis el Axioma de elección, El teorema del buen orden o el Lema de Zorn.

Comentario 68 *Un curso breve de Teoría de conjuntos está disponible en ARACNE.*

---

[2] Para estudiar la lógica de segundo orden puede usarse: María Manzano. (1996) **Extensions of First Order Logic**. Cambridge University Press.

Con todo ello quiero decir que ya sabeis que en "el" Universo matemático hay ciertas estructuras matemáticas de enorme importancia a las que llamamos órdenes. La ventaja de usar un lenguaje lógico es que podemos hacer abstracción de las estructuras concretas y hablar simultánemanete de todas ellas.

Decimos que una relación **R** definida sobre un conjunto **A** es de orden, si es:

- $\alpha\equiv$Reflexiva
- $\beta\equiv$Antisimétrica
- $\gamma\equiv$Transitiva

Cuando además es conectada,

- $\delta\equiv$Conectada

decimos que **R** es un orden lineal.

Cuando

- $\sigma\equiv$Todos los subconjuntos de **A** tienen primer elemento

decimos que la relación **R** es un buen orden.

¿Qué lenguaje necesitamos para hablar de lo que nos interesa, las relaciones de orden?

Claramente el lenguaje proposicional es insuficiente porque en él sólo caben razonaminetos de este tipo:

1. $\neg\gamma\vdash\neg((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)$. [Que nos serviría para ver que si en la relación **R** falla la transitividad, no puede ser de orden.]
2. $(((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)\wedge\delta)\vdash((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)$. [Que nos sirve para ver que si la relación **R** es un orden lineal, también es un orden (parcial).]

Sin embargo, si tomamos un lenguaje de primer orden con un relator binario R, podremos expresar las características de una relación de orden así:

- $\alpha\equiv\forall xRxx$
- $\beta\equiv\forall xy((Rxy\wedge Ryx)\rightarrow x=y)$
- $\gamma\equiv\forall xyz((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz)$
- $\delta\equiv\forall xy(Rxy\vee Ryx)$

Estas fórmulas son verdaderas en las estructuras de los naturales y de los enteros con su orden,

$$\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle,\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$$

y en

$$\langle\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\},\subseteq\rangle$$

y en muchas otras.

En principio $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ axiomatiza la propiedad de ser un orden lineal en el sentido siguiente: una estructura $\mathfrak{A}$ cualquiera es un orden lineal si y sólo si es un modelo de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Cuando además del lenguaje de primer orden tengamos un cálculo deductivo, todas las propiedades de los órdenes lineales las demostraremos en el cálculo y valdrán simultáneamente para todas las estructuras que sean órdenes lineales. De esta forma, al situarnos en este nivel de abstracción que el lenguaje lógico permite, conseguimos economizar recursos.

¿Se pueden expresar en primer orden todas las propiedades imaginables de estructuras matemáticas?, ¿Sirve la lógica de primer orden para axiomatizar toda la matemática?

La respuesta es que nó. En nuestro caso, para expresar la propiedad de ser un buen orden se precisa de la cuantificación sobre propiedades; es decir, de la lógica de segundo orden (SOL). En SOL σ se expresa:

- $\sigma \equiv \forall X(\exists y Xy \rightarrow \exists v(Xv \land \forall z(Xz \rightarrow Rvz \land v \neq z)))$

Como hemos visto, el lenguaje de la lógica de segundo orden es más expresivo que el de primer orden y éste que el de orden cero.

Comentario 69 *Sin embargo, las propiedades lógicas de estos lenguajes van decreciendo: mientras que la lógica proposicional posee un cálculo deductivo correcto, completo y es decidible, la de primer orden posee un cálculo correcto y completo, pero ya no es decidible, y la de segundo orden ni es decidible ni posee un cálculo completo.*

Para expresar gráficamente lo anterior, pensad en una balanza: en un platillo se pone el poder expresivo de la lógica y en el otro las propiedades lógicas. En la lógica proposicional pesan más las propiedades lógicas, en la de segundo orden la capacidad expresiva, la de primer orden está más equilibrada. Sabiendo ésto somos nosostros los que decidiremos qué lógica necesitamos, qué virtudes nos interesa preservar.

8.3. Glosario

1. **Consistencia**: Decimos que un conjunto de enunciados es consistente cuando existe al menos una situación que los hace simultáneamente verdaderos. (ingl.: Consistency).

2. **Inconsistencia**: Decimos que un conjunto de enunciados es inconsistente cuando no existe ninguna situación que los haga simultáneamente verdaderos. (ingl.: Inconsistency)

3. **Consecuencia**: Decimos que un enunciado es consecuencia de un conjunto de enunciados que sirven de hipótesis si, y sólo si, no existe ninguna

situación en la que cada una de las hipótesis sea verdadera y la conclusión sea falsa; es decir, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión sea inconsistente. (ingl.: Consequence).

8.4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Estas referencias coinciden básicamente con las que dimos en el primer capítulo de Lógica proposicional. 1.8

Capítulo 9

El lenguaje de la lógica de primer orden.

El objetivo fundamental de este tema es doble: la adquisición de un lenguaje formal (poniendo especial énfasis en la formalización) y la introducción del método de inducción y recursión sobre la construcción de términos y fórmulas. Se introducirán los conceptos de variables libres y ligadas y el de sustitución.

9.1. Gramática y formalización.

9.1.1. Gramática de L.

¿Cómo se construye un lenguaje formal?

Vamos a construir un lenguaje al que podamos traducir las oraciones del castellano. A diferencia de las lenguas naturales (como el castellano, el inglés, el catalán o el chino) será éste un lenguaje formal que contará con unas reglas de formación precisas. El uso más frecuente que vamos a hacer del lenguaje formal es como vehículo de razonamiento. Sólo nos interesará traducir a nuestro lenguaje formal las expresiones lingüísticas que describan un estado o expresen un pensamiento completo; es decir, nos limitaremos al uso declarativo del lenguaje natural.

Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el español, del mismo modo que utilizamos el español para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama *lenguaje objeto* (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, *metalenguaje* (español, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el español, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.

Finalmente, distinguimos entre *uso* y *mención* de una palabra o una expresión. Usamos normalmente las palabras para referirnos a objetos que no son lingüísticos; es decir, las usamos como un *signo,* para aludir a algo distinto de ellas mismas. Hay otras ocasiones en las que usamos el lenguaje para hablar acerca del propio lenguaje. *Usamos* entonces el metalenguaje para *mencionar* las expresiones de un lenguaje.

Comentario 70 *Una explicación algo más detallada de estos conceptos puede hallarse en el Capítulo 2 de este METABOOK, El lenguaje de la lógica proposicional.*

Comentario 71 *Siguiendo la distinción entre lenguaje y metalenguaje propuesta por Tarski, no expresaremos la verdad de un enunciado en el lenguaje objeto, sino en el metalenguaje. Evitaremos así las denominadas "paradojas semánticas", como la del mentiroso, que brevemente presento a continuación..*

PARADOJA DEL MENTIROSO.

La paradoja más antigua que se conoce es la de Epiménides, el cretense. Decía que todos los cretenses son mentirosos y que todas sus afirmaciones son mentiras. La contradicción aparece cuando uno se pregunta sobre la propia afirmación de Epiménides. ¿ Es también esta afirmación una mentira?

Una forma fácil de verlo es así:

Sea p el enunciado: "Estoy mintiendo". Naturalmente, esto es lo mismo que decir: "No es verdad p", que podríamos formalizar así: $\neg Vp$. Es decir,

(1) $p \equiv \neg Vp$

Pero la propiedad semántica de verdad debería ser definida de forma que para cualquier x, x es verdadera si y sólo si x; es decir, $\forall x(Vx \leftrightarrow x)$.

¿Qué sucede cuando consideramos la fórmula p?.

En primer lugar,

(2) $Vp \leftrightarrow p$

Ahora podemos usar (1) y reemplazar en (2) la fórmula p por su formalización, obteniendo:

(3) $Vp \leftrightarrow \neg Vp$

Naturalmente, esto es una contradicción.

CONCLUSIÓN: Nosotros distinguiremos entre lenguaje y metalenguaje, la fórmula $\forall x(Vx \leftrightarrow x)$ con el significado que se pretende que tenga no puede ser una fórmula del lenguaje objeto. La verdad de un enunciado se expresa en el metalenguaje, nunca en el lenguaje objeto.

Un lenguaje formal consta de un alfabeto básico y de unas reglas precisas de formación de fórmulas.

Nosotros utilizaremos distintos lenguajes de primer orden, dependiendo del uso que queramos darle. Por ejemplo, si queremos hablar de relaciones de orden nos bastará con un lenguaje que posea un signo para referirnos a la relación, si queremos hablar de grupos, necesitaremos un signo para la operación binaria y una constante para el elemento neutro. Dependiendo de la aplicación que vaya a dársele, el lenguaje de primer orden se adecuará, pero hay ciertos signos que son comunes a todos los lenguajes de primer orden.

Alfabeto.

El alfabeto de un lenguaje cualquiera, L, de lógica de primer orden contiene dos tipos de signos: los comunes a todos los lenguajes de primer orden y los que son peculiares de cada lenguaje de primer orden. Entre los primeros están los conectores, los cuantificadores y las variables individuales. También incluímos aquí la igualdad. Entre los segundos están los relatores, los functores y las constantes individuales.

Nosotros usamos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ como conectores, $\forall$ y $\exists$ como cuantificadores y las letras x, y, z, u, v, w, x_0, x_1, x_2,..., y_0, y_1, y_2,... como variables individuales. Usaremos $=$ como signo de igualdad. También, como signos impropios utilizaremos paréntesis: $), ($.

Un lenguaje $L(\mathbf{R}, \mathbf{f}, \mathbf{c})$ concreto contiene además un conjunto $\mathbf{R}$ de relatores, un conjunto $\mathbf{f}$ de functores y un conjunto $\mathbf{c}$ de constantes individuales. Todos o algunos de estos conjuntos pueden ser vacíos.

Para cada número natural n, usaremos R^n, S^n, T^n, R_0^n, R_1^n, R_2^n,... como relatores n-arios.

Para cada número natural n, usaremos f^n, g^n, h^n, f_0^n, f_1^n, f_2^n,... como functores n-arios.

Como constantes individuales usaremos a, b, c, a_0, a_1, a_2, ...

Comentario 72 *Las constantes individuales pueden considerarse constantes 0-arias, en cuyo caso el leguaje se reduciría a:* $L(\mathbf{R}, \mathbf{f})$

Términos y Fórmulas.

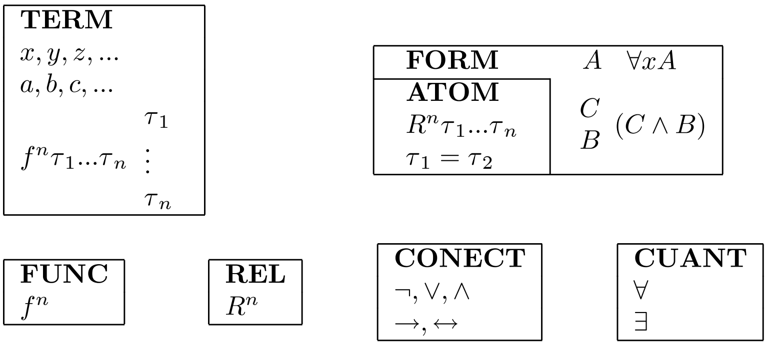
Las fórmulas y los términos de L se construyen siguiendo unas sencillas reglas de formación. Dichas reglas extraen del conjunto de filas de signos del alfabeto a aquellas a las que llamamos términos y fórmulas. Por ejemplo, queremos que R^2ax, $\forall x \exists y(T^2xy \wedge R^2xa)$, $f^1x = b$ sean fórmulas, pero que no lo sean $\rightarrow f^1x = y$, ni $f^2xa \vee R^2ab$. La fórmula $f^1x = b$ es una ecuación, a derecha e izquierda de la igualdad aparecen los términos f^1x y b

Definición 73 *El conjunto de los términos de L (al que llamamos* ***TERM***(L)*, o simplemente* ***TERM****) es* ***el menor conjunto*** *que se puede generar mediante las reglas:*

- **T1.-** Las variables individuales son términos.
- **T2.-** Las constantes individuales son términos.
- **T3.-** Si τ_1, τ_2,..., τ_n son términos, $f^n\tau_1...\tau_n$ es un término. (También podemos escribir, $f^n(\tau_1,...,\tau_n)$)

Definición 74 *El conjunto de las fórmulas de L (al que llamamos* ***FORM***(L)*, o simplemente* ***FORM****, cuando esté claro por el contexto) es* ***el menor conjunto*** *que se puede generar a partir de las reglas siguientes:*

- **F1**.- Si τ_1, τ_2,..., τ_n son términos, $R^n\tau_1...\tau_n$ es una fórmula. (También podemos escribir, $R^n(\tau_1,...,\tau_n)$)
- **F2.-** Si τ_1y τ_2 son términos, $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula.
- **F3**.- Si A y B son fórmulas, también lo son: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$
- **F4.-** Si A es una fórmula, también lo son: $\forall xA$ y $\exists xA$.



Definición 75 *Llamamos* ***expresiones de*** *L al conjunto formado por los términos y las fórmulas de L; es decir,*

$$\mathbf{EXPR}(L) = \mathbf{TERM}(L) \cup \mathbf{FORM}(L)$$

Comentario 76 *Adviértase que tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas, como el menor conjunto que cumple las reglas* ***F1*** *a* ***F4,*** *si un conjunto* $\mathcal{Q}$ *cumple las mencionadas reglas, entonces* ***FORM***$(L) \subseteq \mathcal{Q}$ *, lo que significa que todas las fórmulas están en dicho conjunto. De forma similar para términos.*

Definición 77 *Llamamos* ***fórmulas atómicas*** *a las obtenidas mediante las reglas* ***F1*** *y* ***F2.*** *En especial, las formadas mediante* ***F2*** *son ecuaciones.*

Definición 78 ***Forma lógica:*** *Las fórmulas obtenidas mediante las reglas* ***F3*** *y* ***F4*** *reciben las denominaciones siguientes:*

Forma lógica	**Denominación**
$\neg A$	negación
$(A \wedge B)$	conjunción
$(A \vee B)$	disyunción
$(A \to B)$	condicional
$(A \leftrightarrow B)$	bicondicional
$\forall xA$	generalización
$\exists xA$	particularización

Comentario 79 *Demostrar que una sucesión de signos del alfabeto L es una fórmula consiste en mostrar que se construyó conforme a las reglas del cálculo de fórmulas; es decir,* ***F1*** *a* ***F4****.*

Comentario 80 *El saber identificar la* ***forma lógica*** *de una fórmula dada es fundamental para manipular el cálculo deductivo correctamente.*

9.1.2. Ejemplos

1. Fórmulas atómicas: $Ra,\ fa = x,\ Rffa, ...$
2. Negaciones:
    - *a*) $\neg\forall x\forall y(Px \to Qx))$
    - *b*) $\neg Qx$
    - *c*) $\neg b = c$
    - *d*) $\neg(\forall xy(Rxy \leftrightarrow fx = y) \wedge \forall xyz(Rxy \wedge Rxz \to y = z))$
3. Conjunciones:
    - *a*) $\forall uv((Ru \wedge Rv) \to u = v) \wedge \exists xRx$
    - *b*) $\exists y\forall x(Rx \longleftrightarrow x = y) \wedge (Rx \leftrightarrow x = y)$
    - *c*) $Ru \wedge (Rv \to u = v)$
4. Disyunciones:
    - *a*) $\forall x(Px \to Qx) \vee \exists x(Px \wedge Rx)$
    - *b*) $Rx \vee Qx$
    - *c*) $a = b \vee a = c$
    - *d*) $\forall xy(Rxy \to Ryx) \vee \neg\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$
5. Condicionales:
    - *a*) $\forall x(Fx \to Ra) \to \exists xFx$
    - *b*) $\exists xyFxy \to Ra$
    - *c*) $\forall x(Px \vee Rx) \to \exists xy\,(Fxy \vee Fyx)$
6. Bicondicionales:
    - *a*) $\forall x(Rx \to fx = a) \leftrightarrow (\forall xRx\} \wedge fa = a)$
    - *b*) $\exists xPx \leftrightarrow Qa$
    - *c*) $\forall x\,(Px \to Qa) \leftrightarrow (\forall xPx \vee \exists xRx)$

7. Generalizaciones:
    a) $\forall x(Mxa \rightarrow Mxb)$
    b) $\forall x(Ox \rightarrow \forall y(Ry \rightarrow \neg Exy)$
    c) $\forall xyz(Rxfxy \wedge Rfyxz \rightarrow Rxz)$
8. Particularizaciones:
    a) $\exists x(Mxa \vee Mxc)$
    b) $\exists x \neg a = x$
    c) $\exists x \forall y fx = y$
    d) $\exists x Ox$

9.1.3. Subfórmulas.

Llamamos *subfórmulas* de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por **F1** a **F4**). Descomponer una fórmula en subfórmulas es una manera de demostrar que efectivamente se trata de una fórmula. La forma más sencilla de hacerlo es mediante *árboles genealógicos*, que todo el mundo entiende con facilidad. Para no confundirlos con los árboles lógicos, que se verán después, yo los hago de abajo a arriba, con aspecto de auténtico árbol genealógico.

9.1.4. Formalización.

Este tema tiene una vertiente práctica, la formalización, en la que me gusta insistir, pues considero que es fundamental que se adquiera mucha soltura en el uso del lenguaje simbólico. El que la formalización preceda a la interpretación semántica tiene una justificación: permite una introducción intuitiva de los conectores y de los cuantificadores. Sin embargo, es más fácil hacerlo cuando se domina mejor el lenguaje formal. La alternativa pedagógica que propongo es iniciar ahora la formalización pero redondear el tema al final; por ejemplo, haciendo que algunos de los ejercicios de deducción se propongan en español, o en lenguaje matemático sin formalizar. Otra posiblilidad es usar el programa 'el mundo de Tarski', del que hablaremos luego.

Los apartados que trataremos son los que siguen:

1. Negación.
   Negamos la verdad de un enunciado afirmando su negación. La negación recoge el uso de la partícula "no" del castellano (o cualquiera de sus equivalentes; "no es cierto que", "no es verdad que", "nunca", "jamás"). La interpretación que le daremos será la siguiente:
   La negación de un enunciado verdadero será falsa y la de uno falso será verdadera.

2. Conjunción.
   Cuando utilizamos una conjunción entre dos enunciados queremos indicar que ambos son verdaderos. Normalmente usamos la conjunción copulativa, "y" para indicar conjunción, "pero", "aunque", "sin embargo" se usan también. Hay un ligero matiz que diferencia estos usos, que se pierde en el lenguaje formal. La interpretación que le daremos será la siguiente:
   La conjunción de dos enunciados es verdadera si y sólo si ambos lo son.

3. Disyunción.
   La disyunción que recoge nuestra conectiva es la llamada *incluyente (o no excluyente)*, como cuando en un anuncio **SE SOLICITA SECRETARIA QUE SEPA FRANCÉS O INGLÉS**, que evidentemente no excluye a la que sepa los dos idiomas. Normalmente se expresa mediante "o", "a menos que", "a no ser que", "y/o". La interpretación que le daremos será la siguiente:
   La disyunción de dos enunciados es verdadera si al menos uno de ellos lo es.

4. Condicional.
   Formalizamos $(A \to B)$ para indicar un enunciado condicional. En este caso A es el antecedente y B el consecuente. En castellano usamos normalmente la expresión "si A entonces B". Se usan también "si A, B", "B, si A", "A es condición suficiente para B", "B es condición necesaria para A", "sólo si B, A". La interpretación que le daremos será la siguiente:
   Un enunciado condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en el resto de los casos es verdadero.

5. Bicondicional.
   Cuando queremos indicar que "A es condición suficiente para B" y que "B es condición necesaria para A" lo formalizamos así: $(A \leftrightarrow B)$. La interpretación que le daremos será la siguiente:
   Un enunciado bicondicional es verdadero cuando y sólo cuando sus dos miembros son simultáneamente verdaderos o falsos.

6. Generalización.
   Cuando queremos indicar que "todos los individuos del universo de discurso verifican A", escribimos: $\forall xA$. La interpretación que le daremos será la siguiente:
   Una generalización es verdadera cuando se verifica para todos los individuos del universo.

7. Particularización.
   Cuando queremos expresar que "al menos un individuo del universo verifica A", escribimos: $\exists xA$. La interpretación que le daremos será la siguiente:
   Una particularización es verdadera cuando se verifica para al menos un individuo del universo.

9.1.5. Español en Lógica de primer orden.

EJERCICIO 1.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada.

1. Sólo los seres humanos ($H^1x \equiv x$ es un ser humano) tienen primos ((($P^2xy \equiv$ x es primo de y).
2. Hay un hombre ($M^1x \equiv x$ es un hombre) que adrnira a ($P^2x \equiv yx$ admira a y) todos los hombres.
3. Ningún ser humano ($H^1x \equiv x$ es un hombre) es admirado ($P^2xy \equiv x$ admira a y) por todos los hombres.
4. Sólo algunos seres humanos ($H^1x \equiv x$ es un ser humano) carecen de primos ($P^2xy \equiv x$ es primo de y).
   - *a*) $\exists x \left(H^1x \wedge \forall y \left(H^1y \to P^2xy\right)\right)$
   - *b*) $\forall x \exists y \left(P^2yx \to H^1x\right))$
   - *c*) $\neg\exists x \left(H^1x \wedge \forall y \left(H^1y \to P^2yx\right)\right)$
   - *d*) $\exists x \left(H^1x \wedge \exists y P^2yx\right)$
   - *e*) $\neg\exists x \left(H^1x \wedge P2xx\right)$
   - *f*) Ninguna de ellas.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						

EJERCICIO 2.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada.

1. Sólo algunos cocineros famosos ($P^1x \equiv x$ es un cocinero famoso) son también buenos actores ($R^1x \equiv x$ es un buen actor).
2. Todos los rencorosos ($R^1x \equiv x$ es un rencoroso) son intrigantes ($P^1x \equiv x$ es un intrigante).
3. Ningún tenista ($T^1x \equiv x$ es un tenista) es su propio entrenador ($R^2xy \equiv x$ es entrenador de y).
4. Ningún tenista ($T^1x \equiv x$ es un tenista) es admirado ($R^2xy \equiv x$ admira a y) por todos los demás.
   - *a*) $\forall x(R^1x \to P^1x)$

b) $\neg\forall x(R^1x \to P^1x)$

c) $\neg\exists x(R^1x \land P^1x)$

d) $\forall x(T^1x\neg R^2xx)$

e) $\neg\exists x(T^1x \land \neg\forall y R^2yx)$

f) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						

EJERCICIO 3.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada.

1. Sólo algunos seres humanos ($H^1x \equiv x$ es un ser humano) son progenitores ($P^2xy \equiv x$ es progenitor de y).
2. Todos los seres humanos (H^1) tienen dos progenitores (P^2)
3. Ningún ser humano (H^1) es su propio progenitor (P^2)
4. Ningún ser humano (H^1) es admirado ($P^2xy \equiv x$ admira a y) por todos los hombres.

a) $\exists x\left(H^1x \land \forall y\left(H^1y \to P^2xy\right)\right)$

b) $\forall x(H^1x \to \exists yz\left(P^2yx \land P^2zx \land y \neq x\right))$

c) $\neg\exists x\left(H^1x \land \forall y\left(H^1y \to P^2yx\right)\right)$

d) $\forall x\left(H^1x \to \exists y P^2yx\right)$

e) $\neg\exists x\left(H^1x \land P^2xx\right)$

f) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						

EJERCICIO 4.- En cada uno de los siguientes ejemplos elegid la (o las) respuesta acertada.

1. El hombre ($Hx \equiv x$ es un hombre) siempre ama ($A^2xy \equiv x$ ama a y) a quienes le aman.
2. Existe un hombre ($Hx \equiv x$ es un hombre) que es más viejo que ($D^2xy \equiv x$ es más viejo que y) todos los demás.

3. Sólo algunos hombres ($H \equiv x$ es un hombre) son despreciados ($D^2xy \equiv x$ es despreciado por y) por las personas ($Hx \equiv x$ es un hombre) a quienes ellos aman ($A^2xy \equiv x$ ama a y).
4. Los huracanes ($Hx \equiv x$ es un huracán) arrancan los árboles ($Ax \equiv x$ arranca los árboles) y tumban las casas ($Tx \equiv x$ tumba las casas).
5. El perro ($Hx \equiv x$ es un hombre) es el único animal ($Ax \equiv x$ es un animal)que sueña ($Tx \equiv x$ sueña).
6. Sólo algunos gorilas ($Hx \equiv x$ es un gorila) reconocen a ($D^2xy \equiv x$ reconoce a y) los gorilas contra los que han luchado ($A^2xy \equiv x$ lucha contra y).
7. Los animales ($Ax \equiv x$ es un animal) se irritan siempre mortalmente ($Hx \equiv x$ se irrita mortalmente) si no les presto atención ($Tx \equiv x$ se irrita si no le presto atención).

   a) $\exists y \forall x((Hx \wedge (Tx \wedge \to Ax)) \leftrightarrow x = y)$
   b) $\forall x((Tx \vee Ax) \to Hx)$
   c) $\forall x\,(Tx \wedge Ax) \to Hx)$
   d) $\neg \forall x\,\big(Hx \to \forall y((Hy \wedge A^2xy) \to D^2yx)\big)$
   e) $\exists x(Hx \wedge \forall y(Hy \wedge x \neq y \to D^2xy))$
   f) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 5.- Elegid la (o las) formalización adecuada.

1. Algunos hombres (H) desprecian a (D^2) todos, incluso se desprecian a sí mismos.
2. Existe un hombre (H) que es más viejo que (D^2) todos los demás.
3. Sólo algunos hombres (H) son despreciados (D^2) por las personas (H) a quienes ellos aman (A^2).
4. El gato (H)es el único animal (A) que tiene siete vidas (T).
5. Hay un portero (A) a quien todo el mundo conoce (D^2).
6. Los albañiles (A) se irritan siempre (H) si no les presto atención (T).
7. Ningún animal (A) sin cuernos (H) puede lanzarlo a uno contra una puerta (T)

- *a*) $\exists y \forall x((Hx \wedge (Tx \wedge Ax)) \leftrightarrow x = y)$
- *b*) $\forall x((Tx \wedge Ax) \rightarrow Hx)$
- *c*) $\exists x \big(Hx \wedge \forall y(Hy \rightarrow D^2xy\big)$
- *d*) $\forall x((Tx \vee Ax) \rightarrow Hx)$
- *e*) $\neg \forall x(Hx \rightarrow \forall y((Hy \wedge A^2xy) \rightarrow D^2yx))$
- *f*) Ninguna.

	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

EJERCICIO 6.- Traducid al español los siguientes enunciados de la lógica de primer orden, empleando para ello la clave siguiente:

$Px := x$es un panadero, $Tx := x$ es astuto, $Lx := x$ es lento.

1. $\exists x(Px \wedge Lx)$
2. $\neg \exists x(Px \wedge Lx \wedge Tx)$
3. $\forall x(Tx \rightarrow Px)$
4. $\forall x((Px \wedge Tx) \rightarrow \neg Lx)$
5. $\exists x Lx \wedge \exists x Tx \wedge \neg \exists x(Lx \wedge Tx)$
6. $\forall x(Px \vee \neg Px)$

EJERCICIO 7.- Traducid al español los siguientes enunciados de la lógica de primer orden, empleando para ello las claves siguientes:

$Sx := x$ vive en Santander, $Fx := x$ es futbolista, $Rxy := x$ respeta a y

1. $\forall x(Sx \rightarrow Fx)$
2. $\forall y(Fy \rightarrow \exists z Rzy)$
3. $\exists x \forall y Rxy$
4. $\forall x(Sx \leftrightarrow \neg Fx)$
5. $\forall x(Rxx \leftrightarrow Sx)$
6. $\forall x(\exists u Rxu \rightarrow \exists v \neg Rvx)$

EJERCICIO 8.- Traducid al español las siguientes oraciones del lenguaje de la lógica de predicados. Emplead la clave: $Qxy := x$ quiere a y

1. $\forall x(\forall y Qxy \to \neg\forall z Qzz)$
2. $\forall x(\forall y Qxy \to \forall z\neg Qzz)$
3. $\forall x(\forall y Qxy \to \exists z\neg Qzz)$
4. $\forall x\exists z(\forall y Qxy \to \neg Qzz)$
5. $\forall x\exists z\forall y(Qxy \to \neg Qzz)$
6. $\forall x\exists z\exists y(Qxy \to \neg Qzz)$
7. $\exists z\forall x\exists y(Qxy \to \neg Qzz)$
8. $\exists z\exists y\forall x(Qxy \to \neg Qzz)$
9. $\forall x\forall y(Qxy \to Qyx)$
10. $\forall x\forall y(Qxy \wedge Qyx)$
11. $\exists x\exists y(Qxy \to Qyx)$
12. $\exists x\exists y(Qxy \wedge Qyx)$

EJERCICIO 9.- Asumamos que las oraciones siguientes tratan sobre números naturales. El símbolo monádico de función S representa la función del siguiente (Sn:=n+1), la constante individual c representa el número 0. ¿Qué proposiciones reproducen las oraciones siguientes?

1. $\forall x\neg(Sx = c)$
2. $\forall x(x = c \vee \exists y(x = Sy))$

EJERCICIO 10.- ¿Qué proposiciones sobre números expresan las oraciones siguientes? (Usamos $<$ como relator binario para expresar la relación de 'estrictamente menor que' y el functor binario $\cdot$ para expresar el producto. Nos hemos permitido colocar ambos en medio de los términos que relacionan u operan, en vez de anteponerlos a ellos para que sea más legible.)

1. $\forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$
2. $\forall x\exists y(y \cdot y = x)$

9.1.6. El mundo de Tarski.

Cuando se aprende una segunda lengua se pueden seguir dos métodos muy diferentes:

- Utilizar la lengua propia y hacer traducciones directas e inversas hacia la nueva.
- Aprender a usarla directamente.

El primero es el método tradicional y ha sido el predominante en la enseñanza de la lógica; sin embargo, este método plantea diversos problemas. En el caso de la lógica la dificultad principal estriba en que el lenguaje natural es mucho más complejo que el formal, y con frecuencia las dificultades de formalización radican en el lenguaje natural. Sin pretenderlo, transferimos al lenguaje formal una complejidad que no le es propia. Otro problema es que para ser un buen traductor hace falta conocer y dominar bien las dos lenguas, mientras que en nuestro caso se supone que estamos justamente aprendiendo el lenguaje formal.

Estas consideraciones llevaron a los autores de *El mundo de Tarski,* Barwise y Etchemendy, a concebir el mencionado programa, en el que el aprendizaje del lenguaje formal es “directo”. A la información sobre este programa se puede acceder desde nuestra página de ARACNE:

http://aracne.usal.es

9.2. *Convenciones sobre notación.

Entre las convenciones acerca de la notación, se suele incluir la supresión de paréntesis. Cuando se emplean reglas de supresión de paréntesis, lo más frecuente es asignar prioridad a los conectores. Nosotros tan sólo permitiremos la supresión de paréntesis externos, pues considero que los paréntesis, aunque engorrosos, ayudan mucho a entender las fórmulas.

Utilizaremos una regla de agrupamiento de cuantificadores que dice lo siguiente:

Una secuencia de cuantificadores del mismo tipo pueden simplificarse. De esta forma, en vez de

$$\forall x \forall y \forall z A$$

escribiremos

$$\forall xyz A$$

y en vez de

$$\forall x \forall y \exists z \exists v \forall w A$$

escribiremos

$$\forall xy \exists zv \forall w A$$

Usaremos también $\tau \neq t$ como abreviatura de $\neg(\tau = t)$

Comentario 81 *Por supuesto, la apariencia gráfica de los conectores y cuantificadores es puramente convencional. Los que nosotros usamos son los más frecuentes, pero también se usan:*

$$\begin{array}{ccccccc} \neg & \wedge & \vee & \rightarrow & \leftrightarrow & \forall & \exists \\ \sim & \& & \curlyvee & \supset & \equiv & \bigwedge & \bigvee \\ - & \cdot & \text{ó} & & = & (x) & \end{array}$$

9.3. Variables libres y ligadas.

Considerad la siguiente fórmula:

$$A \equiv \forall x(R^2yz \rightarrow \exists z(R^2\underline{xz} \wedge \neg R^2\underline{x}y))$$

en la que las variables subrayadas están ligadas por los cuantificadores que las preceden; el resto de las variables que aparecen en la fórmula están libres. Es decir, una variable que aparece en una fórmula puede estar libre o ligada, dependiendo de si está fuera o dentro del alcance de un cuantificador.

A continuación definiremos mediante recursión para expresiones cualesquiera (términos y fórmulas), la función LBR que a cada término o fórmula le asigna el conjunto de las variables libres en ella.

Definición 82 ***LBR*** *es una función que a cada término y a cada fórmula le asigna un conjunto de variables, el de las que están libres en ella.*

- $\mathbf{LBR}(x) = \{x\}$
- $\mathbf{LBR}(f^n\tau_1...\tau_n) = \mathbf{LBR}(\tau_1) \cup ... \cup \mathbf{LBR}(\tau_n)$
- $\mathbf{LBR}(R^n\tau_1...\tau_n) = \mathbf{LBR}(\tau_1) \cup ... \cup \mathbf{LBR}(\tau_n)$
- $\mathbf{LBR}(\tau_1 = \tau_2) = \mathbf{LBR}(\tau_1) \cup \mathbf{LBR}(\tau_2)$
- $\mathbf{LBR}(\neg A) = \mathbf{LBR}(A)$
- $\mathbf{LBR}(A \wedge B) = \mathbf{LBR}\,(A \vee B) = \mathbf{LBR}\,(A \rightarrow B) = \mathbf{LBR}\,(A \leftrightarrow B) = \mathbf{LBR}\,(A) \cup \mathbf{LBR}\,(B)$
- $\mathbf{LBR}\,(\forall xA) = \mathbf{LBR}\,(\exists xA) = \mathbf{LBR}\,(A) - \{x\}$

Notación 83 *A los términos sin variables libres los llamamos términos cerrados o designadores, a las fórmulas sin variables libres las llamamos fórmulas cerradas o sentencias.*

Notación 84 *Cuando la variable* $x \in \mathbf{LBR}(A)$ *podemos secribir* $A(x)$ *para hacerlo más explícito.*

9.3.1. Ejercicios

Para cada una de las fórmulas siguientes definid su **LBR**. ¿Cuáles de las fórmulas siguientes son sentencias?

1. $\exists x \exists y(Rxy \wedge Ax) \vee Az$
2. $\exists x \exists y(Rxy \wedge Ax) \vee Ax$
3. $\forall u(\exists v Av \rightarrow (\forall z Rvuz \wedge \neg Bu))$
4. $\neg \exists x \neg(\forall y(Px \wedge \forall x(Rx \rightarrow Ry)) \rightarrow \exists z Sxyz)$

9.4. Sustitución de una variable por un término.

La sustitución es una función que a cada término, a cada variable y a cada expresión le asigna una nueva expresión que resulta de sustituir la variable por el término en la expresión original. Frecuentemente esta operación consiste simplemente en borrar la variable y colocar en su lugar el término. Sin embargo, no queremos que se alteren las estancias libres y ligadas por lo que en algunos casos habrá que realizar reajustes, e incluso no llevar a término la sustitución. No queremos que como resultado de la sustitución el significado de la fórmula se altere sustancialmente; queremos que lo que antes se afirmaba sobre la variable, se afirme ahora sobre el término.

Por ejemplo, la fórmula

$$\forall x Rxy$$

dice que todos los elementos están relacionados mediante la relación nombrada mediante R con un cierto individuo, sin determinar. Si se interpreta esta fórmula en la estructura de los naturales y se interpreta la relación como la de orden, la fórmula es claramente falsa ya que el orden de los naturales carece de extremo superior. Si reemplazamos y por z obtenemos la fórmula

$$\forall x Rxz$$

que dice lo mismo que la anterior. No obstante, si reemplazásemos y por x obtendríamos la fórmula

$$\forall x Rxx$$

que dice que la relación es reflexiva, algo claramente verdadero con la interpretación anterior. Sin embargo, no queremos que con la sustitución se produzcan estos cambios de significado y lo que haremos es, antes de sustituir y por x sustituir la variable cuantificada por una nueva; por ejemplo,v, de esta forma escribimos

$$\forall v Rvx$$

que no cambia el sentido de la fórmula original, ni su valor de verdad.

Definición 85 *La definición recursiva de la sustitución de una variable por un término en una expresión es como sigue:*

- $S^t_x(z) = \begin{array}{|ll|} \hline t & \text{si } x \equiv z \\ z & \text{en caso contrario} \\ \hline \end{array}$
- $S^t_x(f^n\tau_1...\tau_n) = f^n S^t_x(\tau_1)...S^t_x(\tau_n)$
- $S^t_x(R^n\tau_1...\tau_n) = R^n S^t_x(\tau_1)...S^t_x(\tau_n)$
- $S^t_x(\tau_1 = \tau_2) = S^t_x(\tau_1) = S^t_x(\tau_2)$
- $S^t_x(\neg A) = \neg S^t_x(A)$
- $S^t_x(A \wedge B) = S^t_x(A) \wedge S^t_x(B)$
- $S^t_x(A \vee B) = S^t_x(A) \vee S^t_x(B)$
- $S^t_x(A \to B) = S^t_x(A) \to S^t_x(B)$
- $S^t_x(A \leftrightarrow B) = S^t_x(A) \leftrightarrow S^t_x(B)$
- $S^t_x(\forall zA) = \begin{array}{|l||ll|} \hline \forall zA & \text{si } x \notin LBR(\forall zA) & \\ \hline \forall z S^t_x(A) & \text{si} & \begin{array}{l} x \in LBR(\forall zA) \\ z \notin LBR(t) \end{array} \\ \hline \forall v S^t_x S^v_z(A) & \text{si} & \begin{array}{l} x \in LBR(\forall zA) \\ z \in LBR(t) \\ v \text{ es una variable nueva} \end{array} \\ \hline \end{array}$
- $S^t_x(\exists zA) = \begin{array}{|l||ll|} \hline \exists zA & \text{si } x \notin LBR(\exists zA) & \\ \hline \exists z S^t_x(A) & \text{si} & \begin{array}{l} x \in LBR(\exists zA) \\ z \notin LBR(t) \end{array} \\ \hline \exists v S^t_x S^v_z(A) & \text{si} & \begin{array}{l} x \in LBR(\exists zA) \\ z \in LBR(t) \\ v \text{ es una variable nueva} \end{array} \\ \hline \end{array}$

Notación 86 *Cuando t sea un término cerrado, y $x \in \mathbf{LBR}(A)$, escribiremos $A(t)$ en vez de $S^t_x(A(x))$*

9.4.1. Ejemplos de sustitución

1. $S^a_x(Px \wedge Lx) = Pa \wedge La$
2. $S^a_x(\neg\exists x(Px \wedge Lx) \wedge Tx) = \neg\exists x(Px \wedge Lx) \wedge Ta$
3. $S^a_x(\forall x(Tx \to Px)) = \forall x(Tx \to Px)$
4. $S^a_x(\forall z((Pz \wedge Tx) \to \neg Lx)) = \forall z((Pz \wedge Ta) \to \neg La)$
5. $S^a_x((\exists xLx \wedge Tx) \wedge \neg\exists x(Lx \wedge Tx)) = ((\exists xLx \wedge Ta) \wedge \neg\exists x(Lx \wedge Tx))$
6. $S^z_x(\forall x(Px \vee \neg Px)) = \forall x(Px \vee \neg Px)$
7. $S^z_x(\forall xPx \vee \neg Px) = \forall xPx \vee \neg Pz$

8. $S_x^z(\forall z((Pz \wedge Tx) \rightarrow \neg Lx) = \forall v((Pv \wedge Tz) \rightarrow \neg Lz)$

9.5. Glosario.

- **Lenguaje natural (ordinario)** Producidos en la evolución psicológica e histórica; p.e. español, inglés, ruso,...
- **Lenguaje formal (o artificial)** Creados por el hombre, consta de un alfabeto básico y de unas reglas de formación.
- **Metalenguaje y lenguaje objeto** Para hablar acerca de nuestro lenguaje formal utilizaremos el castellano, del mismo modo que utilizamos el castellano para estudiar el latín. Cuando ésto se hace, al lenguaje en estudio se le llama **lenguaje objeto** (latín, en el ejemplo) y al lenguaje que utilizamos de vehículo, **metalenguaje** (castellano, en el ejemplo anterior). Nuestro lenguaje objeto es el lenguaje formal y el castellano, aumentado con algunos signos, es el metalenguaje.
- **Uso y mención.** Decimos que usamos una expresión cuando la utilizamos como un signo; es decir, cuando ésta se refiere a algo distinto de la propia expresión. Decimos que mencionamos una expresión cuando la utilizamos para referirnos a la expresión misma.
- **Alfabeto.** Por alfabeto podemos entender el conjunto de símbolos que forman las expresiones de un lenguaje. El alfabeto de nuestro lenguaje $L(\mathbf{R}, \mathbf{f}, \mathbf{c})$ de la lógica de primer orden contiene dos tipos de signos; a saber, los comunes a los lenguajes de primer orden orden y los peculiares de cada lenguaje de primer orden. Entre los primeros están los conectores, los cuantificadores y las variables. Entre los segundos están los relatores, los functores y las constantes individuales.
- **Conectores.** $\neg$ negador, $\vee$ disyuntor, $\wedge$ conyuntor, $\rightarrow$ condicionador y $\leftrightarrow$ bicondicionador.
- **Cuantificadores.** $\forall$ cuantificador universal, y $\exists$ cuantificador existencial.
- **Variables (individuales).** $x, y, z, u, v, w, x_0, x_1, ...$
- **Relatores.** Un conjunto **R** de símbolos como nombres para las relaciones: $R^n, S^n, T^n, ...$
- **Functores.** Un conjunto **f** de símbolos como nombre para las funciones: $f^n, g^n, h^n, ...$
- **Constantes (individuales).** Un conjunto **c** como nombre para individuos: $a, b, c, ...$

- **Términos, TERM.** Sucesiones finitas de signos del alfabeto obtenidas conforme a las reglas **T1** a **T3**

- **Fórmulas, FORM.** Sucesiones finitas de signos del alfabeto construídas conforme a las reglas **F1** a **F4** del cálculo de fórmulas. Reciben los nombres siguientes:

(REGLAS ***F1*** y **F2)**	fórmula **atómica** (o simple)
$\neg A$	**negación**
$(A \vee B)$	**disyunción**
$(A \wedge B)$	**conjunción**
$(A \rightarrow B)$	**condicional**
$(A \leftrightarrow B)$	**bicondicional**
$\forall x A$	**generalización**
$\exists x A$	**particularización**

- **Expresión, EXPR.** Miembro del conjunto de términos y fórmulas.

$$\textbf{EXPR} = \textbf{TERM} \cup \textbf{FORM}.$$

- **Subfórmulas.** Llamamos subfórmulas de una fórmula a todas aquellas partes de una fórmula que son también fórmulas (generadas por F1 a F4).

- **Forma lógica.** Es el tipo de fórmula; es decir, **atómica, negación, disyunción, conjunción, condicional**, **bicondicional, generalización** y **particularización.**

- **Cálculo (de fórmulas).** Algoritmo (procedimiento efectivo) mediante el cual podemos generar las fórmulas (y justificar que una sucesión determinada de signos del alfabeto lo es)

- **Arbol genealógico (de una fórmula).** Procedimiento de generación de subfórmulas.

- **Inducción.** Procedimiento mediante el cual se prueba que todas las fórmulas tienen una determinada propiedad (o que todos los términos tienen una determinada propiedad). Se hace en dos pasos: (1) Básico y (2) Inductivo.

- **Recursión.** Procedimiento mediante el cual se introduce un nuevo concepto para todas las fórmulas o para todos los términos. Se hace en dos pasos: (1) Básico y (2) Inductivo.

- **Variable libre.** Variable que no está en el alcance de un cuantificador.

- **Variable ligada.** Variable afectada por un cuantificador.

- **LBR**(ε). Conjunto formado por todas las variables libres de la expresión ε.

- **Designadores.** Términos sin variables.

- **Sentencias.** Fórmulas sin variables libres.
- **Sustitución.** Función que a cada variable, a cada término y a cada expresión le asigna una expresión que resulta de sustituir la variable por el término en la expresión original.

9.6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lenguaje natural y Lenguaje formal. Lenguaje y Metalenguaje. Uso y Mención. Funciones veritativas.

Se puede encontrar una estupenda explicación de estos conceptos en DEAÑO, A (1978) pág 21 a 27.

También se puede consultar BERGMANN et alts, (1990), pág 49 a 51.

Formalización.

En el libro de SUPPES (1975), pág 25-44 y 73-89. También en DEAÑO, A (1978) 238-244. Deaño incluye numerosos ejercicios.

El mundo de Tarski

Encontrareis una información actualizada de este y otros programas desarrollados por el CSLI en la siguiente dirección

http://www-csli.stanford.edu/hp/

Capítulo 10

Semántica

Para interpretar fórmulas del lenguaje de primer orden debemos explicitar nuestro dominio de cuantificación y precisar cómo interpretamos las constantes, los functores y los relatores del lenguaje. En este tema el concepto fundamental a introducir es el de verdad en una estructura. A partir de él se define el de consecuencia.

10.1. Estructuras de primer orden

Usaremos letras mayúsculas de tipo gótico (o similar) para referirnos a estructuras. Aunque no sea imprescindible, nosotros presuponemos la existencia de un lenguaje de primer orden, $L(\mathbf{R}, \mathbf{f}, \mathbf{c})$ y definimos una estructura adecuada.

$\mathfrak{A}$ es una estructura adecuada para $L(\mathbf{R}, \mathbf{f}, \mathbf{c})$ syss $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}^{\mathfrak{A}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{A}}, \mathbf{c}^{\mathfrak{A}} \right\rangle$, donde:

1. $\mathbf{A} \neq \emptyset$ es el universo o dominio de la estructura. ($\mathbf{A}$ debe ser un conjunto no vacío.)

2. Para cada relator n-ario $R \in \mathbf{R}$ su interpretación, $R^{\mathfrak{A}}$, es una relación $n-aria$ definida sobre el universo; es decir, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbf{A}^n$

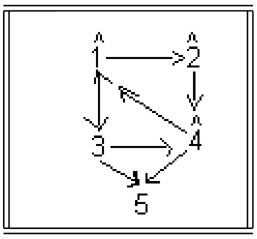
3. Para cada functor n-ario $f \in \mathbf{f}$ su interpretación, $f^{\mathfrak{A}}$, es una función $n-aria$ definida sobre el universo; es decir, $f^{\mathfrak{A}} : \mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}$

4. Para cada $c \in \mathbf{c}$ su interpretación, $c^{\mathfrak{A}}$, es un elemento del universo; es decir, $c^{\mathfrak{A}} \in \mathbf{A}$

10.1.1. Ejemplos de estructuras

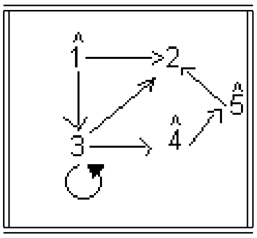
EJEMPLO 1.- Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, c_3^{\mathfrak{A}}, c_4^{\mathfrak{A}}, c_5^{\mathfrak{A}}, A^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ la estructura siguiente:

$\mathbf{A} = \{1,2,3,4,5\}$, $c_1^{\mathfrak{A}} = i$ para i=1,2,...5, $A^{\mathfrak{A}} = \{i : i$ tiene un acento circumflejo$\}$ $R^{\mathfrak{A}} = \{< i, j >$: hay una flecha de i hacia $j\}$



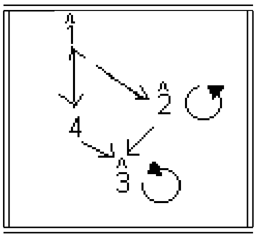
EJEMPLO 2.- ea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, c_3^{\mathfrak{A}}, c_4^{\mathfrak{A}}, c_5^{\mathfrak{A}}, A^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ la estructura siguiente:

$\mathbf{A} = \{1,2,3,4,5\}$, $c_1^{\mathfrak{A}} = i$ para i=1,2,...5, $A^{\mathfrak{A}} = \{i : i$ tiene un acento circumflejo$\}$ $R^{\mathfrak{A}} = \{< i, j >$: hay una flecha de i hacia $j\}$



EJEMPLO 3.- Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, c_3^{\mathfrak{A}}, c_4^{\mathfrak{A}}, c_5^{\mathfrak{A}}, A^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ la estructura siguiente:

$\mathbf{A} = \{1,2,3,4,5\}$, $c_1^{\mathfrak{A}} = i$ para i=1,2,...5, $A^{\mathfrak{A}} = \{i : i$ tiene un acento circumflejo$\}$ $R^{\mathfrak{A}} = \{< i, j >$: hay una flecha de i hacia $j\}$



EJEMPLO 4.- Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, a^{\mathfrak{A}}, b^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}, f_4, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ la estructura siguiente:

$\mathbf{A} = \mathbb{N}$, $a^{\mathfrak{A}} = 2$, $b^{\mathfrak{A}} = 3$, $c^{\mathfrak{A}} = 5$, $f = +$, $R^{\mathfrak{A}} = <$

10.2. Interpretación de L.

Las fórmulas de $L(\mathbf{R},\mathbf{f},\mathbf{c})$ se interpretan en una estructura $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}^{\mathfrak{A}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{A}}, \mathbf{c}^{\mathfrak{A}} \right\rangle$ compuesta de un universo y de una serie de relaciones y funciones definidas sobre el universo. Dada $\mathfrak{A}$ los designadores de L denotan individuos de $\mathbf{A}$ y las sentencias son verdaderas o falsas en $\mathfrak{A}$. La idea es bastante simple: los relatores, functores y constantes individuales del lenguaje formal se interpretan como las relaciones, funciones e individuos destacados en la estructura. Las fórmulas atómicas se interpretan de modo conjuntista; es decir, la fórmula Ra será verdadera en $\mathfrak{A}$ siempre que $a^{\mathfrak{A}} \in R^{\mathfrak{A}}$. La cuantificación se interpreta restringida al universo de la estructura; por ejemplo, $\forall x R^2 xx$ es verdadera en $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ mientras que $\forall xy(R^2xy \rightarrow R^2yx)$ es falsa.

Para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las variables; así, cuando sepamos cómo se interpreta la variable y, sabremos si Ry es verdadera o falsa en la estructura $\mathfrak{A}$ con la asignación considerada. Basada en esa asignación se establece el valor de verdad de una fórmula cualquiera.

ASIGNACIÓN Una asignación es una función F que otorga un elemento del universo a cada variable; es decir,

$$F : VAR \longrightarrow \mathbf{A}$$

ASIGNACIÓN VARIANTE Dada una asignación cualquiera, F, una variable, x, y un individuo del universo de la estructura, $\mathbf{x}$, definimos $F_x^{\mathbf{x}}$ de la siguiente manera:

$$F_x^{\mathbf{x}} = (F - \{\langle x, F(x) \rangle\}) \cup \{\langle x, \mathbf{x} \rangle\}$$

Esta asignación coincide con la asignación F en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x. En la asignación variante ese valor es $\mathbf{x}$, mientras que en la asignación original podía ser cualquier elemento de $\mathbf{A}$.

INTERPRETACIÓN Dada una estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación F definimos una interpretación $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, F \rangle$, extendiendo la función F de forma que otorgue denotación a todos los términos (no solamente a las variables) y un valor de verdad (0: falso, 1: verdadero) a cada fórmula del lenguaje formal L; es decir,

$$\mathfrak{I} : \mathbf{EXPR}(L) \longrightarrow \mathbf{A} \cup \{0,1\}$$

tal que

$$\mathfrak{I}[\mathbf{TERM}(L)] \subseteq A$$

y

$$\mathfrak{I}[\mathbf{FORM}(L)] = \{1,0\}$$

Notación 87 *Dada una interpretacion* $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, F \rangle$ *y una asignación variante* $F_x^{\mathbf{x}}$*, escribiremos* $\mathfrak{I}_x^{\mathbf{x}}$ *para designar a la interpretación* $\langle \mathfrak{A}, F_x^{\mathbf{x}} \rangle$.

Definición 88 *La definición de $\mathfrak{I}$ para* ***TERM***(L) *se hará mediante el procedimiento de inducción semiótica, así:*

- **T1.** Para cada variable individual x, la interpretación viene determinada por la asignación; es decir,

$$\mathfrak{I}(x) = F(x)$$

- **T2.** Para cada constante a, la interpretación viene dada en la estructura $\mathfrak{A}$; es decir,

$$\mathfrak{I}(a) = a^{\mathfrak{A}}$$

- **T3.** Para cada término functorial $f\tau_1...\tau_n$, la interpretación es así:

$$\mathfrak{I}(f\tau_1...\tau_n) = f^{\ \mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\tau_1), ..., \mathfrak{I}(\tau_n))$$

Definición 89 *La definición de $\mathfrak{I}$ para* ***FORM***(L) *se hará mediante el procedimiento de inducción semiótica, de la manera siguiente:*

- **F1**. Para cada fórmula atómica $R\tau_1...\tau_n$, la interpretación es así:

$$\mathfrak{I}(R\tau_1...\tau_n) = 1 \text{ syss } \langle \mathfrak{I}(\tau_1), ..., \mathfrak{I}(\tau_n) \rangle \in R^{\ \mathfrak{A}}$$

- **F2.** En especial, cuando es una igualdad,

$$\mathfrak{I}(\tau_1 = \tau_2) = 1 \text{ syss } \mathfrak{I}(\tau_1) = \mathfrak{I}(\tau_2)$$

- **F3.** Los conectores reciben la interpretación habitual:

1. Una fórmula negada es verdadera cuando la fórmula es falsa y falsa cuando es verdadera.

$$\mathfrak{I}(\neg C) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0$$

2. Una conjunción es verdadera cuando ambas fórmulas lo son

$$\mathfrak{I}(C \wedge D) = 1 \quad syss \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad y \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

3. Una disyunción es verdadera si al menos una de las fórmulas lo es

$$\mathfrak{I}(C \vee D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 1 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

4. Un condicional sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, es verdadero en todos los demás casos

$$\mathfrak{I}(C \rightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \mathfrak{I}(C) = 0 \quad \text{o} \quad \mathfrak{I}(D) = 1$$

5. Un bicondicional es verdadero cuando las dos fórmulas son simultáneamente verdaderas o falsas

$$\Im(C \leftrightarrow D) = 1 \quad \text{syss} \quad \Im(C) = \Im(D)$$

- **F4.** Las fórmulas cuantificadas reciben la siguiente interpretación:

1. Una generalización es verdadera cuando lo es para cada elemento del universo

$$\Im(\forall x C) = 1 \text{ syss para cada } \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \Im_x^{\mathbf{a}}(C) = 1$$

2. Una particularización es verdadera cuando lo es para algún miembro del universo

$$\Im(\exists x C) = 1 \text{ syss existe un } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ tal que:} \Im_x^{\mathbf{a}}(C) = 1$$

SATISFACIBILIDAD E INSATISFACIBILIDAD

Definición 90 *Una fórmula C es* ***satisfacible*** *syss hay una interpretación $\Im$ tal que $\Im(C) = 1$.*

Definición 91 *Dada una interpretación $\Im$ tal que $\Im(C) = 1$ decimos que $\Im$ satisface a la fórmula C ; o también, que $\Im$* ***es modelo*** *de la fórmula C.*

Notación 92 *Es corriente escribir $\Im \models C$ para indicar que $\Im$ es modelo de C.*

Definición 93 *Un conjunto de fórmulas Γ es* ***satisfacible*** *syss hay una interpretación $\Im$ tal que $\Im(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$.*

Definición 94 *Dada una interpretación $\Im$ tal que $\Im(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$ decimos que $\Im$ satisface al conjunto Γ ; o también, que $\Im$* ***es modelo de*** *Γ.*

Notación 95 *Es corriente escribir $\Im \models \Gamma$ para indicar que $\Im$ es modelo de Γ.*

Comentario 96 *Si el conjunto de fórmulas es finito, $\Gamma = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$, Γ es satisfacible syss $G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n$ es satisfacible.*

Comentario 97 *El concepto intuitivo correspondiente es, como habreis adivinado, el de coherencia, o compatibilidad de creencias.*

Definición 98 *Una fórmula C es* ***insatisfacible*** *syss no es satisfacible; es decir, no hay ninguna interpretación $\Im$ tal que $\Im(C) = 1$.*

Definición 99 *Un conjunto de fórmulas Γ es* ***insatisfacible*** *syss no hay ninguna interpretación $\Im$ tal que $\Im(G) = 1$ para cada fórmula $G \in \Gamma$.*

10.2.1. Ejercicios

EJERCICIO 1.-

¿Cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas en la estructura del ejemplo 1 de 10.1.1 ?

	Verdadero	Falso
Rc_3c_4		
Ac_5		
Rc_1c_1		
$Rc_3c_5 \wedge Rc_1c_2$		
$(Rc_1c_3 \vee Rc_5c_5) \rightarrow Ac_4$		
$\exists xRxc_2$		
$\forall x(\exists yRyx \vee Ax)$		
$\forall z(Az \rightarrow \forall u(Au \leftrightarrow (Rzu \vee Ruz)))$		

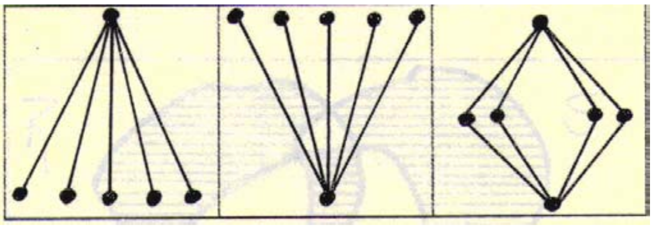
EJERCICIO 2.-

Considerando de nuevo la estructura del ejemplo 1 de 10.1.1, indicad la verdad o falsedad en él de las sentencias, indicando aparte el alcance de los cuantificadores que aparecen en cada sentencia.

	Verdadero	Falso
$\exists xAx \wedge \forall z(Rzz \vee \exists xRxz)$		
$\exists x\exists y(Rxy \rightarrow \exists zRyz)$		
$\exists x(\exists yRyx \rightarrow \exists zRxz)$		
$\forall xAx \vee \exists y\exists z(Ryz \wedge Rzy \wedge \neg\exists u(\neg u = y \wedge \neg u = z \wedge Ryu))$		
$\forall x(Ax \vee \exists y\exists z(Ryz \wedge Rzy \wedge \neg\exists u(\neg u = y \wedge \neg u = z \wedge Ryu)))$		

EJERCICIO 3.-

Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{B}, R^{\mathfrak{B}} \rangle$, $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{C}, R^{\mathfrak{C}} \rangle$ las estructuras representadas en el dibujo (los puntos unidos por líneas ascendentes están relacionados; es decir, seguimos la pauta de los diagramas de Hasse).



1. En el lenguaje común adecuado a todos ellos (con sólo un relator binario como signo peculiar,R^2) escribid cinco sentencias verdaderas en todos ellos.
2. Estos sistemas tienen una estructura matemática conocida: escribid los axiomas que caracterizan dicha estructura.
3. Idlos tomando de dos en dos y escribid en cada caso una sentencia que los distinga.

EJERCICIO 4.-

Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle Z, 1, \times \rangle$ las estructuras de los enteros con el cero y la adición y la de los enteros con el uno y el producto.

1. En el lenguaje adecuado a dichos sistemas encontrad una sentencia que sea verdadera en el primerp pero que no lo sea en el segundo.
2. Escribid cinco sentencias verdaderas en ambos.

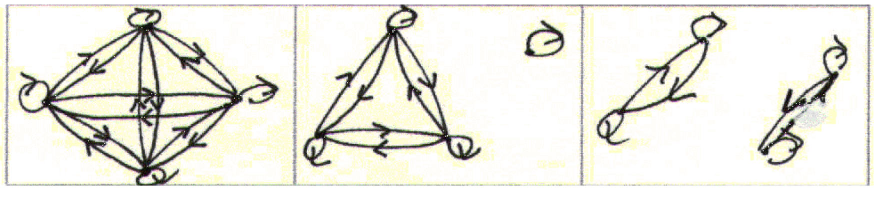
EJERCICIO 5.-

Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0, +1 \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, 0, +2, \rangle$ las estructursas siguientes: $\mathfrak{A}$ tiene como universo el conjunto de los números naturales, el cero como función ceroaria, la operación monaria de sumar uno.
$\mathfrak{B}$ sólo se distingue de $\mathfrak{A}$ en su operación monaria, que aquí es la de sumar dos.

1. En el lenguaje adecuado a dichos sistemas encontrad una sentencia que sea verdadera en el primero pero que no lo sea en el segundo.
2. Escribid cinco sentencias verdaderas en ambos.

EJERCICIO 6.-

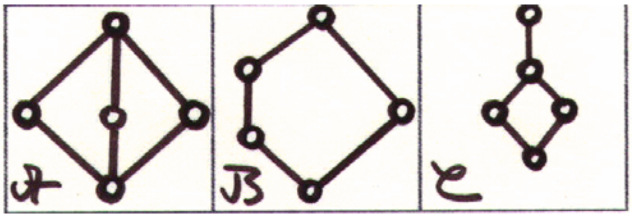
Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{B}, S^{\mathfrak{B}} \rangle$, $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{C}, T^{\mathfrak{C}} \rangle$ los sistemas representados en el dibujo (los puntos unidos por flechas están relacionados).



1. En el lenguaje adecuado a todos estos sistemas (con sólo un relator binario como signo peculiar, R^2) escribid cinco sentencias verdaderas en todos ellos.
2. Estos sistemas tienen una estructura matemática conocida. Escribid las sentencias que caracterizan dicha estructura.
3. Idlos tomando de dos en dos y escribid en cada caso una sentencia que los distinga.

EJERCICIO 7.-

Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{B}, R^{\mathfrak{B}} \rangle$, $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{C}, R^{\mathfrak{C}} \rangle$ las estructuras representadas en el dibujo (los puntos unidos por líneas ascendentes están relacionados; es decir, seguimos la pauta de los diagramas de Hasse).



1. En el lenguaje adecuado a todos estos sistemas (con sólo un relator binario como signo peculiar, R^2) escribid cinco sentencias verdaderas en todos ellos.
2. Estos sistemas tienen una estructura matemática conocida. Escribid las sentencias que caracterizan dicha estructura.
3. Idlos tomando de dos en dos y escribid en cada caso una sentencia que los distinga.

EJERCICIO 8.-

1. Asociad cada fórmula con su significado en teoría de conjuntos, en cualquier estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{B}} \rangle$

(1)	$\forall x(\exists y Rxy \rightarrow Px)$
(2)	$\neg \exists x(Px \wedge Rxx)$
(3)	$\exists x(Px \wedge \neg Rxx)$

(a)	$P^{\mathfrak{B}} \cap I_{R^{\mathfrak{A}}} = \emptyset$
(b)	$P^{\mathfrak{B}} \cap \sim I_{R^{\mathfrak{A}}} \neq \emptyset$
(c)	$Dom(R^{\mathfrak{A}}) \subseteq P^{\mathfrak{B}}$

Figura 10.1:

2. Encontrad una estructura $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{B}} \right\rangle$ en donde sean verdaderas las tres fórmulas

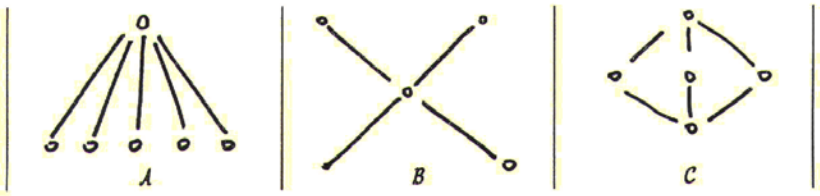
EJERCICIO 9.-

Sean $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}} \right\rangle$, $\mathfrak{B} = \left\langle \mathbf{B}, R^{\mathfrak{B}} \right\rangle$, $\mathfrak{C} = \left\langle \mathbf{C}, R^{\mathfrak{C}} \right\rangle$ las estructuras representadas en el dibujo (los puntos unidos por líneas ascendentes están relacionados; es decir, seguimos la pauta de los diagramas de Hasse).

1. En el lenguaje adecuado a todos ellos (con sólo un relator binario como signo peculiar,R^2) escribid tres sentencias verdaderas en todos ellos.
2. Idlos tomando de dos en dos y escribid en cada caso una sentencia que los distinga.
3. Estos sistemas tienen una estructura matemática conocida: escribid los axiomas que caracterizan dicha estructura.

EJERCICIO 10.-

Sean $\mathfrak{A} = \left\langle \mathbf{A}, R^{\mathfrak{A}} \right\rangle$, $\mathfrak{B} = \left\langle \mathbf{B}, R^{\mathfrak{B}} \right\rangle$, $\mathfrak{C} = \left\langle \mathbf{C}, R^{\mathfrak{C}} \right\rangle$ las estructuras representadas en el dibujo (los puntos unidos por líneas ascendentes están relacionados; es decir, seguimos la pauta de los diagramas de Hasse).



1. En el lenguaje adecuado a todos ellos (con sólo un relator binario como signo peculiar,R^2) escribid tres sentencias verdaderas en todos ellos.

2. Idlos tomando de dos en dos y escribid en cada caso una sentencia que los distinga.
3. Estos sistemas tienen una estructura matemática conocida: escribid los axiomas que caracterizan dicha estructura.

10.3. Conceptos clave.

Acabamos de definir los conceptos de *satisfacibilidad* de una fórmula y de un conjunto de fórmulas, ahora introducimos la relación de *consecuencia* y su negación (la de *independencia*) y terminamos definiendo la *equivalencia* entre fórmulas. El concepto de *validez* se reducirá al de consecuencia (del conjunto vacío de fórmulas). También, como cuestión terminológica, diremos que una interpretación $\mathfrak{I}$ es un *modelo* de una fórmula (o de un conjunto de fórmulas) en el caso en que la interpretación satisfaga a la fórmula (o a cada una de las fórmulas del conjunto).

Al introducir el concepto de consecuencia hay que hacer hincapie en cómo hemos conseguido precisar la idea intuitiva de razonamiento válido sin tener que recurrir a la retraducción al castellano.

VALIDEZ, CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA.

Definición 100 *Una fórmula C es* ***consecuencia*** *de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \models C$ - syss todo modelo de Γ lo es también de C; es decir, toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ, hace verdadera a C.*

Definición 101 *Una fórmula C es* ***válida*** *-y escribimos $\models C$ - syss $\emptyset \models C$; es decir, toda interpretación hace verdadera a C.*

Definición 102 *Una fórmula C es* ***independiente*** *de un conjunto de fórmulas Γ -y escribimos $\Gamma \not\models C$ - syss C no es consecuencia de Γ ; es decir, hay modelos de Γ que no lo son de C.*

EQUIVALENCIA LÓGICA.

Definición 103 *Dos fórmulas C y D son* ***lógicamente equivalentes*** *si y sólo si*

$$C \models D \text{ y } D \models C$$

Notación 104 *Usaremos el signo $\equiv$ para expresar este* ***metaconcepto****, escribiremos $C \equiv D$*

Comentario 105 *$\equiv$ no es el bicondicional del lenguaje L, que sigue siendo $\leftrightarrow$, es una relación binaria entre fórmulas establecida en el metalenguaje.*

10.3.1. Pruebas de independencia

1. Haced una prueba de independencia:

   a) $\forall x \exists y Rxy \nvDash \exists y \forall x Rxy$

   b) $\neg \exists x (Rx \wedge Sx) \nvDash \neg \exists x Rx \wedge \neg \exists x Sx$

   c) $\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz) \nvDash \forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$

2. Demostrad que el siguiente conjunto $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ de fórmulas es independiente; es decir, demostrad que para cada $\delta \in \Delta$ se cumple: $\Delta - \{\delta\} \nvDash \delta$

$$\begin{array}{lcl} \delta_1 & \equiv & \forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz) \\ \delta_2 & \equiv & \forall x \forall y(Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y) \\ \delta_3 & \equiv & \forall x \forall y(Rxy \vee Ryx) \end{array}$$

10.4. Métodos para determinar propiedades semánticas.

De momento sólo contamos con las definiciones para determinar propiedades semánticas. En capítulos posteriores introduciremos las tablas semánticas y un cálculo de deducción natural.

Si se compara a la lógica de primer orden con la proposicional, vemos que hemos ganado de forma evidente en cuanto al poder expresivo se refiere, pero hemos pagado como tributo con las tablas de verdad. A estas alturas en lógica proposicional contábamos con un procedimiento, el de las tablas de verdad, que en un número finito de pasos determinaba si una fórmula cualquiera era válida. En lógica de primer orden no sólo no tenemos tablas de verdad sino que se puede demostrar que FOL no es decidible; es decir, no existe ningún procedimiento efectivo (o algoritmo) que en un número finito de pasos nos diga si una fórmula es válida o nó.

Comentario 106 *Estos resultados se conocen desde los años treinta, cuando Church y Turing (de forma independiente) demostraron la indecidibilidad de la lógica de primer orden. Para resolver (negativamente) el problema de la decidibilidad de FOL, que había planteado Hilbert, tanto Church como Turing tuvieron que precisar y definir matemáticamente el concepto de computabilidad efectiva. Así nacieron la denominada $\lambda-$definibilidad, y la computabilidad mediante máquinas abstractas (de Turing) y se estableció la conocida como* ***tesis de Church****, que afirma que el concepto intuitivo y el matemático son equivalentes. Os recominedo la lectura de mi artículo: "Vida, Obra y Algunos Milagros de Alonzo Church", publicado por HPL (History and Philosophy of Logic) en 1997 y que os podeis bajar de mi página web (http://cts.usal.es/~mara)*

Sin embargo, aunque la validez (y por consiguiente, la insatisfacibilidad) son indecidibles, no todo está perdido pues para fórmulas (o conjuntos finitos de fórmulas) insatisfacibles la comprobación se hace en un número finito de pasos. Lo que sucede es que si la fórmula (o conjunto finito de ellas) es satisfacible el procedimiento de comprobación puede entrar en un bucle infinito. Por consiguiente, la lógica de primer orden (más concretamente el problema de la validez y el de la insatisfacibilidad) es *semi-decidible*; es decir, hay procedimientos efectivos que permiten decidir en tiempo finito las respuestas positivas (válida la fórmula, insatisfacible la negación), pero no siempre las respuestas negativas (no válida, satisfacible la negación). Dicho de otra manera, el conjunto de las fórmulas válidas de primer orden no es decidible, pero al menos es recursivamente enumerable.

En capítulos posteriores introduciremos cálculos para la lógica de primero orden y demostraremos su completud y corrección.

Comentario 107 *Demostrar la indecidibilidad de la lógica de primer orden cae fuera de lo razonable en un curso introductorio de lógica.*

SATISFACIBILIDAD

- *Directo*: Encontrar una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$

INSATISFACIBILIDAD (OBVIO)

- *Directo (no tanto):* Demostrar que no hay ninguna interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}(G) = 1$ para cada $G \in \Gamma$

CONSECUENCIA E INDEPENDENCIA Para determinar consecuencia e independencia usaremos el

MÉTODO MATEMÁTICO
¿Quereis conocerlo?

(REDUCCIÓN AL CASO ANTERIOR)

Es decir, usaremos:

$$\begin{array}{rcl}\Gamma \models C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \;\text{ es insatisfacible}\\ \models C & \text{syss} & \{\neg C\} \;\text{ es insatisfacible}\\ \Gamma \not\models C & \text{syss} & \Gamma \cup \{\neg C\} \;\text{ es satisfacible}\end{array}$$

Comentario 108 *Como recordareis de lógica proposicional, nosotros usamos el signo* $\models$ *en el metalenguaje para expresar propiedades de fórmulas, así:*

METALENGUAJE

C es válida	$\models C$
C no es válida	$\not\models C$
C es una contradicción C es insatisfacible	$\models \neg C$
C es satisfacible $\neg C$ no es válida	$\not\models \neg C$
C es contingente	$\not\models C$ y $\not\models \neg C$

10.5. *Algunas propiedades de conectores y cuantificadores.

Véase la sección de lógica proposicional 3.7 en donde se enuncian las principales propiedades booleanas de los conectores $\vee, \wedge$ y $\neg$: asociatividad de $\vee$ y $\wedge$, commutatividad, distributividad, leyes de De Morgan, idempotencia, absorción, doble negación, etc.

Por lo que respecta a la interdefinición de los conectores en lógica proposicional se puede demostrar que nos bastan dos de ellos (por ejemplo, $\neg$ y $\vee$) para tener un lenguaje igualmente expresivo que el que ya teníamos. Evidentemente, estos resultados siguen siendo aplicables a FOL.

A continuación damos algunas equivalencias propias de FOL, en donde aparecen cuantificadores.

Equivalencias básicas

1. $\forall x A \equiv \neg\exists x \neg A$
2. $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
3. $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$

Cuantificadores y conectores

1. $\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x(A \wedge B)$
2. $\exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x(A \vee B)$

Cuantificación múltiple

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$

Cuantificación vacía Si x no está libre en B, se cumple:

1. $\forall xA \wedge B \equiv \forall x(A \wedge B)$
2. $\forall xA \vee B \equiv \forall x(A \vee B)$
3. $\exists xA \wedge B \equiv \exists x(A \wedge B)$
4. $\exists xA \vee B \equiv \exists x(A \vee B)$

Cuantificación y sustitución Si x no está libre en A y $x \neq y$, se cumple:

1. $\forall xA \equiv \forall y S_x^y A$
2. $\exists xA \equiv \exists y S_x^y A$

10.6. Simplificación del lenguaje formal.

De la definición de satisfacción de fórmulas se sigue que no necesitamos todos los conectores y cuantificadores que hemos introducido. Para algunos propósitos -por ejemplo, en las pruebas por inducción semiótica, en la mayor parte de las implementaciones informáticas-, conviene tener un lenguaje reducido, más económico. Sin embargo, no queremos restarle expresividad.

Se obtiene un lenguaje al menos tan expresivo como el L, cuando habiendo elegido un subconjunto propio del de sus signos lógicos demostramos que todas las fórmulas de L pueden definirse, mediante fórmulas equivalentes, usando el conjunto reducido de signos lógicos. De esta manera el lenguaje básico queda notablemente aligerado y cuando tengamos que demostrar algún metateorema para todas las fórmulas, mediante inducción semiótica, lo agradeceremos. No obstante, podemos conservar en la práctica del lenguaje objeto todos los signos, ya que las fórmulas que incluyen el resto de conectores pueden ser consideradas abreviaturas. De lo consignado en 3.7 y en 1 en apartados precedentes se desprende:

- Podemos suponer que nuestro lenguaje sólo el cuantificador existencial $\exists$ y los conectores $\neg$ y $\vee$. Las fórmulas que incluyen $\forall$ y el resto de conectores $\bot, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ pueden considerarse abreviaturas.

- Podemos suponer que nuestro lenguaje sólo tiene el cuantificador universal $\forall$ y los conectores $\neg$ y $\wedge$. Las fórmulas que incluyen $\exists$ y el resto de conectores $\bot, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ pueden considerarse abreviaturas.

- Podemos suponer que nuestro lenguaje sólo contiene el cuantificador universal, $\forall$ y que sólo tiene los conectores $\neg$ $\vee$ y $\wedge$. Las fórmulas que incluyen el resto de conectores $\bot, \rightarrow, \leftrightarrow$ y el particularizador, $\exists$, pueden considerarse abreviaturas.

- En otros contextos se usan otros conjuntos de conectores; por ejemplo, en lógica modal se suele usar $\{\perp, \rightarrow, \forall\}$. Las fórmulas que incluyen el resto de conectores $\neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow$ y el particularizador, $\exists$, pueden ser consideradas abreviaturas.

10.7. Glosario.

- **Estructura.** Llamamos estructura a una tupla formada por: (1) Un conjunto no vacío llamado universo o dominio de la estructura, (2) Una serie de relaciones definidas sobre el universo de la estructura, (3) Una serie de funciones definidas sobre el universo de la estructura y (4) una serie de individuos del universo destacados en la estructura.
- **Asignación.** Una asignación sobre una estructura es una función que a cada variable del lenguaje le otorga un elemento del universo de la estructura.
- **Interpretación.** Una interpretación es un par ordenado formado por una estructura y una asignación. Dada una interpretación los términos del lenguaje adquieren denotación (individuos del universo) y las fórmulas del lenguaje valor de verdad (son verdaderas o falsas).
- **Satisfacible.** Una fórmula es satisfacible cuando existe una interpretación que la hace verdadera. Un conjunto de fórmulas es satisfacible cuando existe una interpretación que las hace simultáneamente verdaderas.
- **Modelo.** Una interpretación es modelo de una fórmula (o de un conjunto de fórmulas) cuando la hace verdadera (simultáneamente verdaderas).
- **Insatisfacible.** Una fórmula (o conjunto de fórmulas) es insatisfacble cuando no hay ninguna interpretación que la haga verdadera (simultáneamente verdaderas).
- **Consecuencia.** Una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas cuando toda interpretación que hace simultáneamente verdaderas a las fórmulas del conjunto, hace también verdadera a la fórmula.
- **Validez.** Una fórmula es válida cuando toda interpretación la hace verdadera.
- **Independencia.** Una fórmula es independiente de un conjunto de fórmulas cuando no es consecuencia de ellas; es decir, hay una interpretación que hace verdadero al conjunto pero falsa a la fórmula.
- **Equivalencia lógica.** Dos fórmulas son lógicamente equivalentes cuando la primera es consecuencia de la segunda y la segunda de la primera; es decir, el bicondicional entre ellas es una fórmula válida.

10.8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

El capítulo II de MANZANO, M. **Teoría de Modelos** se ocupa de la Semántica de la lógica de primer orden, pero no tiene un carácter tan elemental como el de estas notas.

Capítulo 11

Tableaux para lógica de primer orden

11.1. Introducción

Ya hemos visto los tableaux para la lógica proposicional (fórmulas construidas a partir de átomos usando sólo las conectivas booleanas $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$).

Ahora extenderemos este trabajo a la lógica de predicados (de primer orden) Sólo necesitamos añadir algunas reglas para lidiar con los cuantificadores y la identidad.

De todos modos, la construcción de un tableau (si hay alguno) para una fórmula ya no será ´automática´.

11.1.1. Contenidos

- Revisión rápida de la lógica de primer orden
- Reglas de Tableau para la lógica de primer orden
- Ejemplos
- Corrección y completud
- Dificultades del caso de primer orden
- Conclusión.

11.2. Nuevas reglas de tableau para la lógica de predicados

Sea L un lenguaje con un número infinito de constantes, y sea A una L-fórmula. Hacemos un *tableau para* A empezando con A y aplicando *las reglas de los tableau.*

Las reglas son exactamente las de la lógica proposicional, con dos reglas mas para los cuantificadores (y dos reglas mas para la identidad — véase mas tarde):

- γ-reglas:

1. Si t es un término cerrado y x una variable, entonces de $\forall x A(x)$ podemos deducir $A(t)$.
2. Si t es un término cerrado y x una variable, de $\neg\exists x A(x)$ podemos deducir $\neg A(t)$.

- δ-reglas: sea x una variable.

1. De $\exists x A(x)$ podemos deducir $A(c)$ para cualquier constante $c \in L$ que no haya sido usada aún en la rama.
2. De $\neg\forall x A(x)$ poemos deducir $\neg A(c)$ para cualquier constante $c \in L$ que no haya sido usada aún en la rama.

11.3. Ejemplos

Practiquemos con las nuevas γ- y δ-reglas.

11.3.1. Un ejemplo sencillo

Este es un tableau para $\forall x\exists y Pxy$.

1.	$\forall x\exists y Pxy$	
2.	$\exists y Pcy$	$\gamma 1$
3.	Pcd	$\delta 2$

Notas

- La línea 2 se obutvo de la línea 1 usando la γ-regla 'de $\forall x A(x)$ se deduce $A(t)$ para cualquier término cerrado t'. Aquí, $A(x)$ era '$\exists y Pxy$'. Elejimos que t fuese una constante, c. (Podríamos haber usado cualquier otro término cerrado.)

- La línea 3 se obtuvo de la línea 2 aplicando la δ-regla 'de $\exists y A(y)$ se deduce $A(c)$ donde c es una constante nueva'. Aquí, $A(y)$ era Pcy. Usamos la constante nueva d. *No podíamos haber usado c* porque ya había sido previamente usada en la rama (línea 2).

11.3.2. Otro tableau para $\forall x\exists y Pxy$

Podríamos haber seguido aplicando las reglas:

1.	$\forall x\exists y Pxy$	
2.	$\exists y Pcy$	$\gamma 1$
3.	Pcd	$\delta 2$
4.	$\exists y Pdy$	$\gamma 1$
5.	$\exists y Pf(c,a,d), y$	$\gamma 1$
6.	Pde	$\delta 4$
7.	$Pf(c,a,d), b$	$\delta 5$

es también un tableau para $\forall x\exists y Pxy$, y así sucesivamente.

¿Cómo sabemos cuándo tenemos que parar?

Intentamos cerrar el tableau, como en la lógica proposicional. Paramos cuando todas las ramas están cerradas (contienen una contradicción explícita).

Desde luego, puede ocurrir que no seamos lo suficientemente listos como para conseguir cerrarlo Véase mas tarde.

11.3.3. $\vdash$ para la lógica de predicados

Sea A una sentencia. Escribimos $\vdash A$ si existe un tableau cerrado para $\neg A$. Esto es como en la lógica proposicional.

Ejemplo 109 *Probamos* $\vdash \exists x Px \to \neg\forall x \neg Px$.

1. $\neg(\exists x Px \to \neg\forall x \neg Px)$

2. $\exists x Px$	$\alpha 1$
3. $\neg\neg\forall x \neg Px$	$\alpha 1$
4. Pc	$\delta 2$
5. $\forall x \neg Px$	$\alpha 3$
6. $\neg Pc$	$\gamma 5$

cerrado(4,6)

Notas

- $\exists x Px \to \neg\forall x \neg Px$ es obviamente válida.
- Las antiguas reglas proposicionales (aquí, α) también se usan.
- Mejor usar las δ-reglas antes que las γ-reglas, puesto que tienen restricciones.

11.3.4. Las γ-reglas son mas difíciles de aplicar que las δ-reglas

- En la línea 4, la constante c debía ser *nueva en la rama.* (Sin problemas —no se ha usado todavía ninguna constante!)
  Una constante nueva es como cualquier otra. Por lo tanto no importa cuál usemos. Una vez que decidimos aplicar una δ-regla a una fórmula, hay esencialmente una única forma de hacerlo.
- En la línea 6, podríamos haber sustituido x por cualquier término cerrado en la fórmula $\forall x \neg P(x)$.

  ¿Por qué elejimos c?

  Esta es una cuestión profunda. La respuesta es: nos dimos cuenta de que nos podía servir para cerrar el tableau! La práctica ayuda a hacer esto. Pero no hay un método general (algoritmo) para hacerlo. Después hablaremos más de esto.

11.3.5. Otro tableau cerrado

Probamos $\vdash \exists x\forall y Cxy \to \forall y\exists x Cxy$.

1. $\neg(\exists x\forall y Cxy \to \forall y\exists x Cxy)$

2.	$\exists x\forall y Cxy$	$\alpha 1$
3.	$\neg\forall y\exists x Cxy$	$\alpha 1$
4.	$\forall y Cay$	$\delta 2$
5.	$\neg\exists x Cxb$	$\delta 3$
6.	Cab	$\gamma 4$
7.	$\neg Cab$	$\gamma 5$

cerrado(6,7)

Notas

- En la línea 4, la constante a tenía que ser *nueva en la rama.* (Sin problemas!)
- En la línea 5, la constante b tenía que ser *nueva en la rama. No podíamos haber usado a.*
- En la línea 6, podemos usar un término cerrado para sustituir y en $\forall y Cay$ (línea 4). Miramos la línea 5 y conjeturamos b, con la esperanza de cerrar el tableau.
- En la línea 7, podemos usar cualquier término cerrado para sustituir y en $\neg\exists x Cxb$ (línea 5). Elejmos a, para cerrar el tableau.

11.3.6. Y otro tableau cerrado

Probamos $\vdash \exists x(Px \vee Qx) \to \exists x Px \vee \exists x Qx$.

1. $\neg(\exists x(Px \vee Qx) \to \exists x Px \vee \exists x Qx)$

2.	$\exists x(Px \vee Qx)$	$\alpha 1$
3.	$\neg(\exists x Px \vee \exists x Qx)$	$\alpha 1$
4.	$\neg\exists x Px$	$\alpha 3$
5.	$\neg\exists x Qx$	$\alpha 3$
6.	$Pc \vee Qc$	$\delta 2$

7.	Pc	$\beta 6$	9.	Qc	$\beta 6$
8.	$\neg Pc$	$\gamma 4$	10.	$\neg Qc$	$\gamma 5$
cerrado(7,8)			cerrado(9,10)		

11.4. Reglas de Tableau para la igualdad

1. Podemos introducir $t = t$ en una rama, en cualquier momento, para cualquier término cerrado t.
2. Si $A(x)$ es atómica y t, τ son términos cerrados, entonces de $A(t)$ y $\tau = t$ (o bien $t = \tau$) podemos deducir $A(\tau)$.

Es decir, podemos sustituir un término cerrado por otro en una fórmula atómica si hemos probado que son iguales.

(Esta regla no se limitará a las fórmulas atómicas; es decir, $A(t)$ pudiera no serlo)

Y esto es todo!

11.4.1. Ejemplo

Probamos $\vdash \exists x(x = x)$.

1.	$\neg\exists x(x = x)$	
2.	$\neg(c = c)$	$\gamma 1$
3.	$c = c$	$=$

cerrado(2,3)

Similarmente probamos $\vdash \forall x(x = x)$.

1.	$\neg\forall x(x = x)$	
2.	$\neg(c = c)$	$\delta 1$
3.	$c = c$	$=$

cerrado(2,3)

Escribimos '=' para justificar la regla 1.

11.4.2. Otro ejemplo

Probamos $\vdash \forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$.

1.	$\neg\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$	
2.	$\neg\forall y(c = y \rightarrow y = c)$	$\delta 1$
3.	$\neg(c = d \rightarrow d = c)$	$\delta 2$
4.	$c = d$	$\alpha 3$
5.	$\neg(d = c)$	$\alpha 3$
6.	$c = c$	$=$
7.	$d = c$	$=$(4,6)

cerrado(6,7)

La línea 7 se obtuvo sustituyendo d por c en la línea 6, usando la línea 4 ($c = d$) y =-regla 2. En este uso de la igualdad aplincando la regla 2,

- 't' es c
- 'τ' es d
- '$t = \tau$' es $c = d$ — línea 4
- '$A(x)$' es $x = c$ — esto es atómico, como requiere la regla.
- '$A(t)$' es $c = c$ — línea 6
- '$A(\tau)$' es $d = c$ — línea 7.

11.5. Corrección y completud

Como en la lógica proposicional puede mostrarse que

Teorema 110 *Para toda L-sentencia* A : A *es válida syss* $\vdash A$.

No probaremos esto formalmente. La idea de la prueba es la misma que en la lógica proposicioanl, pero mas complicada porque una rama abierta podría ser infinita, y por la presencia de términos y de la igualdad Véase un libro de texto para los detalles.

11.6. Ejercicios

Probad lo siguiente construyendo tableaux cerrados:

1. $\exists x \forall y Cxy \vdash \forall x \exists y Cyx$.
2. $\forall x(\exists y Fxy \to Gbx), \forall x \forall y Fyx \vdash \exists x Gxx$.
3. $\forall x \forall y(\exists z Fyz \to Fxy), Fab \vdash \forall y \exists x Fyx$.
4. $\forall x \forall y(Pxy \to \neg Pyx) \vdash \forall x \neg Pxx$.
5. $\forall x(Gx \to Hx), \forall x(Hx \to Fx), Ga \vdash \exists x(Gx \wedge Fx)$.
6. $\neg Cb \wedge \neg Cc, Ca \to \forall x Cx \vdash \neg Ca$.
7. $\exists x Fxb \to \forall x Gx, \forall x Fax \vdash \forall x(Hxc \to Gx)$.
8. $\forall x \forall y(\exists z Ayz \to Axy), \neg Att \vdash \neg Ats$.
9. $\forall x \exists y(Ayx \wedge Cxy), Awh \vdash \exists x Chx$.
10. $\forall x \exists y(Cx \to Py \wedge Axy) \vdash \forall x(Cx \to \exists y(Py \wedge Axy))$.
11. $\forall x \exists y(Cx \to Py \wedge Axy) \vdash \forall x(Cx \to \exists y(Py \wedge Axy))$.
12. $Ga, \exists x(Gx \wedge Mx), \forall x(Mx \to Fx) \vdash \exists x(Gx \wedge Fx)$.
13. $\forall x(Sx \wedge Fx \to Bx), Sj \wedge Lj \vdash \forall x(Sx \wedge Lx \to Fx) \to Bj$.
14. $\forall x(Bxa \to Bxb) \vdash \forall x(\exists y(Cxy \wedge Bya) \to \exists z(Bzb \wedge Cxz))$.
15. $\forall x(Cx \to Fx) \vdash \forall x(\exists y(Txy \wedge Cy) \to \exists z(Txz \wedge Fz))$.
16. $\forall x(Bxh \to Bxw) \vdash \forall x(\exists y(Bxh \wedge Myx) \to \exists z(Bxw \wedge Mzx))$.
17. $\forall x(Rx \wedge Bx \to Cx), \neg \exists x(Gx \wedge Cx) \vdash \forall x(Rx \wedge Bx \to \neg Gx)$.
18. $\forall x(Sx \wedge Mx \wedge \forall y(Gy \wedge My \to Dy) \to Cx), \forall x(Gx \wedge Dx \wedge Mx \to \forall y(Gy \wedge My \to Dy)) \vdash \forall x \forall y((Sx \wedge Mx) \wedge (Gy \wedge Dy \wedge My) \to Cx)$.

19. $\forall x(Gx \to Px \lor Rx), \forall x(Fx \to Tx) \vdash (\forall x(Px \lor Rx \to Fx) \to \forall x(Gx \to Tx))$.

20. $\forall x(Cxj \land Cxm \to Bxm), \exists x(Cxm \land \neg Bxm) \vdash \exists x(Cxm \land \neg Cxj)$.

11.7. Solución a los ejercicios propuestos

(1).- $\exists x\forall yCxy \vdash \forall x\exists yCyx$.

1. $\exists x\forall yCxy$
2. $\neg\forall x\exists yCyx$

3. $\forall yCby$ $\delta 1$
4. $\neg\exists yCya$ $\delta 2$
5. $\neg Cba$ $\gamma 4$
6. Cba $\gamma 3$

closed(5,6)

(2).- $\forall x(\exists yFxy \to Gbx), \forall x\forall yFyx \vdash \exists xGxx$.

1. $\forall x(\exists yFxy \to Gbx)$
2. $\forall x\forall yFyx$
3. $\neg\exists xGxx$

4. $\exists yFby \to Gbb$ $\gamma 1$
5. $\forall yFyb$ $\gamma 2$
6. Fbb $\gamma 5$
7. $\neg Gbb$ $\gamma 3$

8. $\neg\exists yFby$ $\beta 4$	10. Gbb $\beta 4$
9. $\neg Fbb$ $\gamma 8$	closed(7,10)
closed(6,9)	

(3).- $\forall x\forall y(\exists zFyz \to Fxy), Fab \vdash \forall y\exists xFyx$.

1. $\forall x\forall y(\exists zFyz \to Fxy)$
2. Fab
3. $\neg\forall y\exists xFyx$

4. $\neg\exists xFcx$ $\delta 3$
5. $\neg Fca$ $\gamma 4$
6. $\forall y(\exists zFyz \to Fcy)$ $\gamma 1$
7. $\exists zFaz \to Fca$ $\gamma 6$

8. $\neg\exists zFaz$ $\beta 7$	10. Fca $\beta 7$
9. $\neg Fab$ $\gamma 8$	closed(5,10)
closed(2,9)	

(4).- $\forall x\forall y(Pxy \to \neg Pyx) \vdash \forall x\neg Pxx$.

1. $\forall x\forall y(Pxy \to \neg Pyx)$
2. $\neg\forall x\neg Pxx$
3. $\neg\neg Paa$ $\delta 2$

4. $\forall y(Pay \to \neg Pya)$ $\gamma 1$
5. $Paa \to \neg Paa$ $\gamma 4$

6. $\neg Paa$ $\beta 5$
closed(3,6)

7. $\neg Paa$ $\beta 5$
closed(3,7)

(5).- $\forall x(Gx \to Hx), \forall x(Hx \to Fx), Ga \vdash \exists x(Gx \wedge Fx)$.

First version:

1. $\forall x(Gx \to Hx)$
2. $\forall x(Hx \to Fx)$
3. Ga
4. $\neg\exists x(Gx \wedge Fx)$

5. $Ga \to Ha$ $\gamma 1$

6. $\neg Ga$ $\beta 5$
closed(3,6)

7. Ha $\beta 5$
8. $Ha \to Fa$ $\gamma 2$

9. $\neg Ha$ $\beta 8$
closed(7,9)

10. Fa $\beta 8$
11. $\neg(Ga \wedge Fa)$ $\gamma 4$

12. $\neg Ga$ $\beta 11$
closed(3,12)

13. $\neg Fa$ $\beta 11$
closed(10,13)

Second version:

1. $\forall x(Gx \to Hx)$
2. $\forall x(Hx \to Fx)$
3. Ga
4. $\neg\exists x(Gx \wedge Fx)$

5. $\neg(Ga \wedge Fa)$ $\gamma 4$

6. $\neg Ga$ $\beta 5$
closed(3,6)

7. $\neg Fa$ $\beta 5$
8. $Ga \to Ha$ $\gamma 1$

9. $\neg Ga$ $\beta 8$
closed(3,9)

10. Ha $\beta 8$
11. $Ha \to Fa$ $\gamma 2$

12. $\neg Ha$ $\beta 11$
closed(10,12)

13. Fa $\beta 11$
closed(7,13)

(6).- $\neg Cb \wedge \neg Cc,\ Ca \rightarrow \forall x Cx \vdash \neg Ca.$

1. $\neg Cb \wedge \neg Cc$
2. $Ca \rightarrow \forall x Cx$
3. $\neg\neg Ca$

4. $\neg Cb$ $\alpha 1$
5. $\neg Cc$ $\alpha 1$

6. $\neg Ca$ $\beta 2$	7. $\forall x Cx$ $\beta 2$
closed(3,6)	8. Cb $\gamma 7$
	closed(4,8)

(7).- $\exists x Fxb \rightarrow \forall x Gx,\ \forall x Fax \vdash \forall x(Hxc \rightarrow Gx).$

1. $\exists x Fxb \rightarrow \forall x Gx$
2. $\forall x Fax$
3. $\neg\forall x(Hxc \rightarrow Gx)$

4. $\neg\exists x Fxb$ $\beta 1$	7. $\forall x Gx$ $\beta 1$
5. $\neg Fab$ $\gamma 4$	8. $\neg(Hdc \rightarrow Gd)$ $\delta 3$
6. Fab $\gamma 2$	9. Hdc $\alpha 8$
closed(5,6)	10. $\neg Gd$ $\alpha 8$
	11. Gd $\gamma 7$
	closed(10,11)

(8).- $\forall x\forall y(\exists z Ayz \rightarrow Axy),\ \neg Att \vdash \neg Ats.$

1. $\forall x\forall y(\exists z Ayz \rightarrow Axy)$
2. $\neg Att$
3. $\neg\neg Ats$

4. $\forall y(\exists z Ayz \rightarrow Aty)$ $\gamma 1$
5. $\exists z Atz \rightarrow Att$ $\gamma 4$

6. $\neg\exists z Atz$ $\beta 5$	8. Att $\beta 5$
7. $\neg Ats$ $\gamma 6$	closed(2,8)
closed(3,7)	

(9).- $\forall x\exists y(Ayx \wedge Cxy),\ Awh \vdash \exists x Chx.$

1. $\forall x\exists y(Ayx \wedge Cxy)$
2. Awh
3. $\neg\exists x Chx$

4. $\exists y(Ayh \wedge Chy)$ $\gamma 1$
5. $Aah \wedge Cha$ $\delta 4$
6. Aah $\alpha 5$
7. Cha $\alpha 5$
8. $\neg Cha$ $\gamma 3$

closed(7,8)

(10).- $\forall x \exists y(Cx \to Py \wedge Axy) \vdash \forall x(Cx \to \exists y(Py \wedge Axy))$.

1. $\forall x \exists y(Cx \to Py \wedge Axy)$
2. $\neg \forall x(Cx \to \exists y(Py \wedge Axy))$

3. $\neg(Ca \to \exists y(Py \wedge Aay))$ $\quad \delta 2$
4. Ca $\quad \alpha 3$
5. $\neg \exists y(Py \wedge Aay)$ $\quad \alpha 3$
6. $\exists y(Ca \to Py \wedge Aay)$ $\quad \gamma 1$
7. $Ca \to Pb \wedge Aab$ $\quad \delta 6$

8. $\neg Ca$ $\quad \beta 7$	9. $Pb \wedge Aab$ $\quad \beta 7$
closed(4,8)	10. $\neg(Pb \wedge Aab)$ $\quad \gamma 5$
	closed(9,10)

(11).- $\forall x \exists y(Cx \to Py \wedge Axy) \vdash \forall x(Cx \to \exists y(Py \wedge Axy))$.

1. $\exists x Fx \to \forall x Gx$
2. $\neg \forall x(\neg Gx \to \neg Fx)$

3. $\neg(\neg Ga \to \neg Fa)$ $\quad \delta 2$
4. $\neg Ga$ $\quad \alpha 3$
5. $\neg\neg Fa$ $\quad \alpha 3$

6. $\neg \exists x Fx$ $\quad \beta 1$	8. $\forall x Gx$ $\quad \beta 1$
7. $\neg Fa$ $\quad \gamma 6$	9. Ga $\quad \gamma 8$
closed(5,7)	closed(4,9)

(12).- $Ga, \exists x(Gx \wedge Mx), \forall x(Mx \to Fx) \vdash \exists x(Gx \wedge Fx)$.

1. Ga
2. $\exists x(Gx \wedge Mx)$
3. $\forall x(Mx \to Fx)$
4. $\neg \exists x(Gx \wedge Fx)$

5. $Gb \wedge Mb$ $\quad \delta 2$
6. Gb $\quad \alpha 5$
7. Mb $\quad \alpha 5$
8. $Mb \to Fb$ $\quad \gamma 3$

9. $\neg Mb$ $\quad \beta 8$	10. Fb $\quad \beta 8$	
closed(7,9)	11. $\neg(Gb \wedge Fb)$ $\quad \gamma 4$	
	12. $\neg Gb$ $\quad \beta 11$	13. $\neg Fb$ $\quad \beta 11$
	closed(6,12)	closed(10,13)

(13).- $\forall x(Sx \wedge Fx \to Bx),\ Sj \wedge Lj \vdash \forall x(Sx \wedge Lx \to Fx) \to Bj.$

1. $\forall x(Sx \wedge Fx \to Bx)$
2. $Sj \wedge Lj$
3. $\neg(\forall x(Sx \wedge Lx \to Fx) \to Bj)$

4. $\forall x(Sx \wedge Lx \to Fx)$ $\alpha 3$
5. $\neg Bj$ $\alpha 3$
6. $Sj \wedge Lj \to Fj$ $\gamma 4$

7. $\neg(Sj \wedge Lj)$ $\beta 6$

closed(2,7)

8. Fj $\beta 6$
9. $Sj \wedge Fj \to Bj$ $\gamma 1$

10. $\neg(Sj \wedge Fj)$ $\beta 9$

15. Bj $\beta 9$

closed(5,15)

11. $\neg Sj$ $\beta 10$
12. Sj $\alpha 2$
13. Lj $\alpha 2$

closed(11,12)

14. $\neg Fj$ $\beta 10$

closed(8,14)

(14).- $\forall x(Bxa \to Bxb) \vdash \forall x(\exists y(Cxy \wedge Bya) \to \exists z(Bzb \wedge Cxz)).$

1. $\forall x(Bxa \to Bxb)$
2. $\neg\forall x(\exists y(Cxy \wedge Bya) \to \exists z(Bzb \wedge Cxz))$

3. $\neg(\exists y(Ccy \wedge Bya) \to \exists z(Bzb \wedge Ccz))$ $\delta 2$
4. $\exists y(Ccy \wedge Bya)$ $\alpha 3$
5. $\neg\exists z(Bzb \wedge Ccz)$ $\alpha 3$
6. $Ccd \wedge Bda$ $\delta 4$
7. Ccd $\alpha 6$
8. Bda $\alpha 6$
9. $\neg(Bdb \wedge Ccd)$ $\gamma 5$

10. $\neg Bdb$ $\beta 9$
11. $Bda \to Bdb$ $\gamma 1$

14. $\neg Ccd$ $\beta 9$

closed(7,14)

12. $\neg Bda$ $\beta 11$

closed(8,12)

13. Bdb $\beta 11$

closed(10,13)

(15).- $\forall x(Cx \to Fx) \vdash \forall x(\exists y(Txy \land Cy) \to \exists z(Txz \land Fz))$.

1. $\forall x(Cx \to Fx)$
2. $\neg\forall x(\exists y(Txy \land Cy) \to \exists z(Txz \land Fz))$

3. $\neg(\exists y(Tay \land Cy) \to \exists z(Taz \land Fz))$ $\delta 2$
4. $\exists y(Tay \land Cy)$ $\alpha 3$
5. $\neg\exists z(Taz \land Fz)$ $\alpha 3$
6. $Tab \land Cb$ $\delta 4$
7. Tab $\alpha 6$
8. Cb $\alpha 6$
9. $\neg(Tab \land Fb)$ $\gamma 5$

10. $\neg Tab$ $\beta 9$
closed(7,10)

11. $\neg Fb$ $\beta 9$
12. $Cb \to Fb$ $\gamma 1$

13. $\neg Cb$ $\beta 12$
closed(8,13)

14. Fb $\beta 12$
closed(11,14)

(16).- $\forall x(Bxh \to Bxw) \vdash \forall x(\exists y(Bxh \land Myx) \to \exists z(Bxw \land Mzx))$.

1. $\forall x(Bxh \to Bxw)$
2. $\neg\forall x(\exists y(Bxh \land Myx) \to \exists z(Bxw \land Mzx))$

3. $\neg(\exists y(Bah \land Mya) \to \exists z(Baw \land Mza))$ $\delta 2$
4. $\exists y(Bah \land Mya)$ $\alpha 3$
5. $\neg\exists z(Baw \land Mza)$ $\alpha 3$
6. $Bah \land Mba$ $\delta 4$
7. Bah $\alpha 6$
8. Mba $\alpha 6$
9. $Bah \to Baw$ $\gamma 1$

10. $\neg Bah$ $\beta 9$
closed(7,10)

11. Baw $\beta 9$
12. $\neg(Baw \land Mba)$ $\gamma 5$

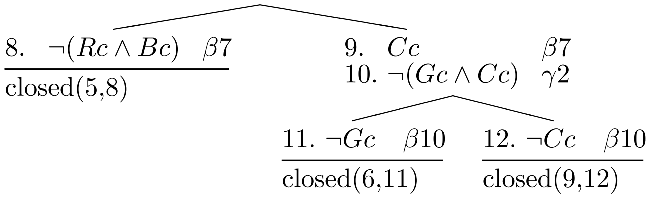
13. $\neg Baw$ $\beta 12$
closed(11,13)

14. $\neg Mba$ $\beta 12$
closed(8,14)

(17).- $\forall x(Rx \land Bx \to Cx), \neg\exists x(Gx \land Cx) \vdash \forall x(Rx \land Bx \to \neg Gx)$.

1. $\forall x(Rx \land Bx \to Cx)$
2. $\neg\exists x(Gx \land Cx)$
3. $\neg\forall x(Rx \land Bx \to \neg Gx)$

4. $\neg(Rc \land Bc \to \neg Gc)$ $\delta 3$
5. $Rc \land Bc$ $\alpha 4$
6. $\neg\neg Gc$ $\alpha 4$
7. $Rc \land Bc \to Cc$ $\gamma 1$



8. $\neg(Rc \land Bc)$ $\beta 7$
closed(5,8)

9. Cc $\beta 7$
10. $\neg(Gc \land Cc)$ $\gamma 2$

11. $\neg Gc$ $\beta 10$
closed(6,11)

12. $\neg Cc$ $\beta 10$
closed(9,12)

(18).- $\forall x(Sx \wedge Mx \wedge \forall y(Gy \wedge My \to Dy) \to Cx)$, $\forall x(Gx \wedge Dx \wedge Mx \to \forall y(Gy \wedge My \to Dy)) \vdash \forall x\forall y((Sx \wedge Mx) \wedge (Gy \wedge Dy \wedge My) \to Cx)$.

1. $\forall x(Sx \wedge Mx \wedge \forall y(Gy \wedge My \to Dy) \to Cx)$
2. $\forall x(Gx \wedge Dx \wedge Mx \to \forall y(Gy \wedge My \to Dy))$
3. $\neg\forall x\forall y((Sx \wedge Mx) \wedge (Gy \wedge Dy \wedge My) \to Cx)$

4. $\neg\forall y((Sa \wedge Ma) \wedge (Gy \wedge Dy \wedge My) \to Ca)$ $\delta 3$
5. $\neg((Sa \wedge Ma) \wedge (Gb \wedge Db \wedge Mb) \to Ca)$ $\delta 4$
6. $(Sa \wedge Ma) \wedge (Gb \wedge Db \wedge Mb)$ $\alpha 5$
7. $\neg Ca$ $\alpha 5$
8. $Sa \wedge Ma$ $\alpha 6$
9. $Gb \wedge Db \wedge Mb$ $\alpha 6$
10. $Gb \wedge Db \wedge Mb \to \forall y(Gy \wedge My \to Dy)$ $\gamma 2$

11. $\neg(Gb \wedge Db \wedge Mb)$ $\beta 10$

closed(9,11)

12. $\forall y(Gy \wedge My \to Dy)$ $\beta 10$
13. $(Sa \wedge Ma) \wedge \forall y(Gy \wedge My \to Dy) \to Ca$ $\gamma 1$

14. $\neg((Sa \wedge Ma) \wedge \forall y(Gy \wedge My \to Dy))$ $\beta 13$

15. $\neg(Sa \wedge Ma)$ $\beta 14$

closed(8,15)

16. $\neg\forall y(Gy \wedge My \to Dy)$ $\beta 14$

closed(12,16)

17. Ca $\beta 13$

closed(7,17)

(19).- $\forall x(Gx \to Px \vee Rx)$, $\forall x(Fx \to Tx) \vdash (\forall x(Px \vee Rx \to Fx) \to \forall x(Gx \to Tx))$.

1. $\forall x(Gx \to Px \vee Rx)$
2. $\forall x(Fx \to Tx)$
3. $\neg(\forall x(Px \vee Rx \to Fx) \to \forall x(Gx \to Tx))$

4. $\forall x(Px \vee Rx \to Fx)$ $\alpha 3$
5. $\neg\forall x(Gx \to Tx)$ $\alpha 3$
6. $\neg(Gc \to Tc)$ $\delta 5$
7. Gc $\alpha 6$
8. $\neg Tc$ $\alpha 6$
9. $Gc \to Pc \vee Rc$ $\gamma 1$

10. $\neg Gc$ $\beta 9$

closed(7,10)

11. $Pc \vee Rc$ $\beta 9$
12. $Pc \vee Rc \to Fc$ $\gamma 4$

13. $\neg(Pc \vee Rc)$ $\beta 12$

closed(11,13)

14. Fc $\beta 12$
15. $Fc \to Tc$ $\gamma 2$

16. $\neg Fc$ $\beta 15$

closed(14,16)

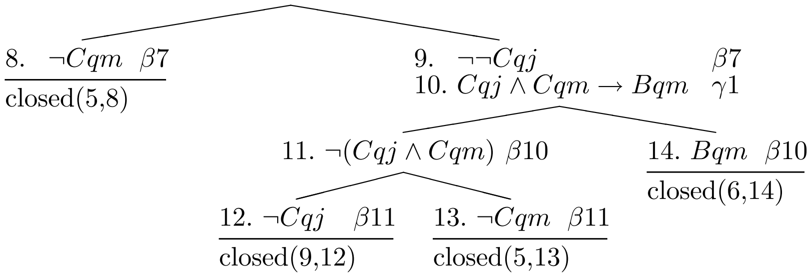
17. Tc $\beta 15$

closed(8,17)

(20).- $\forall x(Cxj \land Cxm \to Bxm),\ \exists x(Cxm \land \neg Bxm) \vdash \exists x(Cxm \land \neg Cxj)$.

1. $\forall x(Cxj \land Cxm \to Bxm)$
2. $\exists x(Cxm \land \neg Bxm)$
3. $\neg\exists x(Cxm \land \neg Cxj)$

4. $Cqm \land \neg Bqm$ $\delta 2$
5. Cqm $\alpha 4$
6. $\neg Bqm$ $\alpha 4$
7. $\neg(Cqm \land \neg Cqj)$ $\gamma 3$



11.7.1. Ejercicios propuestos sin solución

Demostrad mediante tableaux:

1. $\forall uv((Ru \land Rv) \to u = v) \land \exists xRx \vdash \exists y\forall x(Rx \longleftrightarrow x = y)$
2. $\forall xy(Rxy \leftrightarrow fx = y) \vdash \forall xyz(Rxy \land Rxz \to y = z)$
3. $\exists x\forall y(Rx \leftrightarrow x = y) \vdash \forall uv(Ru \land Rv \to u = v)$
4. $\forall x(Px \to Qx), \exists x(Px \land Rx) \vdash \exists x(Rx \land Qx)$
5. $\forall x(Fx \to Ra) \vdash \exists xFx \to Ra$
6. $\exists xy\,(Fxy \lor Fyx) \vdash \exists xyFxy$
7. $\exists xPx \to Qa \vdash \forall x\,(Px \to Qa)$
8. $\forall x(Px \lor Rx) \vdash \forall xPx \lor \exists xRx$
9. $\forall x(Mxa \to Mxb), \exists x(Mxa \lor Mxc) \vdash \exists x(Mxb \lor Mxc)$
10. $\{a = b \lor a = c, \neg b = c\} \vdash \exists x\neg a = x$
11. $\{\forall xyfx = y, \forall xyz(Rxy \land Ryz \to Rxz)\} \vdash \forall xyz(Rxfxy \land Rfyxz \to Rxz)$
12. $\{\forall x(Rx \to fx = a), \forall xRx\} \vdash fa = a$
13. $\forall x(Ox \to \forall y(Ry \to \neg Exy), \forall x(Ox \to \exists y(Hy \land Exy), \exists xOx\} \vdash \exists x(Hx \land \neg Rx)$

11.7.2. Ejercicios de formalización y deducción en primer orden

EJERCICIO 1.-

1. Formalizad en primer orden:
   $\alpha \equiv$ Si todos los justos ($Jx \equiv x$ es justo) merecen el respeto de sus compatriotas ($Rx \equiv x$ merece el respeto de sus compatriotas), entonces Cipriano ($c \equiv$Cipriano) mereció su destino ($Dx \equiv x$ merece su destino).
   $\beta \equiv$ Todos los magnánimos ($Mx \equiv x$ es magnánimo) y sólo ellos, merecen el respeto de sus compatriotas. $\gamma \equiv$ Todos los magnánimos son justos.
   Por consiguiente,
   $\varphi \equiv$ Cipriano mereció su destino.

2. ¿Es correcto el razonamiento?. Justifica tu respuesta deduciendo la conclusión de las hipótesis en un cálculo deductivo o (en su caso) mediante una prueba de independencia. (Nota: en el primer caso, demuestra $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vdash \varphi$. en el segundo, demuestra que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \nvDash \varphi$

EJERCICIO 2.-

1. Formaliza en primer orden. Usando las siguientes claves: $Dx \equiv x$ es un demócrata. $Lx \equiv x$ es un liberal. $Sx \equiv x$ es un socialista. $Cx \equiv x$ es un conservador. $Rx \equiv x$ acepta la revolución industrial. $Px \equiv x$ defiende la institución de la propiedad privada de los medios de producción. $Mx \equiv x$ defiende el establecimiento de una economía de mercado autorregulada. $Tx \equiv x$ defiende la conversión del trabajo en mercancía
   En el siglo XIX un demócrata podía ser tanto liberal como socialista. Los liberales aceptaban la revolución industrial y defendían la institución de la propiedad privada de los medios de producción, el establecimiento de una economía de mercado autorregulada y la conversión del trabajo en mercancía. Los socialistas aceptaban también la revolución industrial, pero rechazaban esos tres puntos de la ideología liberal. Los conservadores, por su parte, rechazaban la revolución industrial. De ello se desprende que ni los liberales ni los socialistas eran conservadores, que ningún liberal era socialista y que ningún conservador era demócrata.

2. ¿Es correcto el razonamiento?. Justifica tu respuesta deduciendo la conclusión de las hipótesis en un cálculo deductivo o (en su caso) mediante una prueba de independencia.

EJERCICIO 3.-

1. Formaliza en primer orden.
   Todos los escritores ($Ex \equiv x$ es un escritor) que comprenden la naturaleza humana ($Cx \equiv x$ comprende la naturaleza humana) son inteligentes ($Ix \equiv x$ es inteligente).
   Nadie es verdadero poeta ($Px \equiv x$ es un verdadero poeta) a menos que

pueda mover los corazones de los hombres ($Mx \equiv x$ puede mover los corazones de los hombres).
Shakespeare ($a \equiv$ Shakespeare) escribió ($E^2xy \equiv x$ escribe y) Hamlet ($b \equiv$ Hamlet).
Ningún escritor que no comprenda la naturaleza humana puede mover los corazones de los hombres.
Nadie sino un verdadero poeta podía haber escrito Hamlet.
Shakespeare era inteligente.

2. ¿Es correcto el razonamiento?. Justifica tu respuesta deduciendo la conclusión de las hipótesis en un cálculo deductivo o (en su caso) mediante una prueba de independencia.

EJERCICIO 4.-

1. Formalizad en porimer orden.
   Sólo hay un sofista ($Sx \equiv x$ es un sofista) que enseña gratuitamente ($Gx \equiv x$ enseña gratuitamente), y éste es Sócrates ($a \equiv$ Sócrates). Sócrastes argumenta mejor que ($A^2xy \equiv x$ argementa mejor que y) ningún otro sofista. Platón ($b \equiv$ Platón) argumenta mejor que algún sofista que enseña gratuitamente. Si una persona argumenta mejor que otra segunda, entonces esta segunda no argumenta mejor que la primera. Por consiguiente, Platón no es un sofista.

2. ¿Es correcto el razonamiento?. Justifica tu respuesta deduciendo la conclusión de las hipótesis en un cálculo deductivo o (en su caso) mediante una prueba de independencia.

EJERCICIO 5.-

1. Formaliza en primer orden. Usa las claves de formalización siguientes: $a \equiv$ Lancelot. $b \equiv$ Ginebra. $c \equiv$ Arturo. $Axy \equiv x$ ama a y. $Bxy \equiv x$ es amigo de y
   Lancelot ama a la Reina Ginebra.
   Lancelot no ama a ninguno de sus amigos.
   El Rey Arturo es amigo de Lancelot.
   Los amigos de Lancelot odian a aquellos a quienes Lancelot ama.
   Por consiguiente,
   El Rey Arturo odia a la Reina Ginebra.

2. ¿Es correcto el razonamiento?. Justifica tu respuesta deduciendo la conclusión de las hipótesis en un cálculo deductivo o (en su caso) mediante una prueba de independencia.

11.8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Véase 4.8